Lektion 6

OBS!! inte denna genomgång

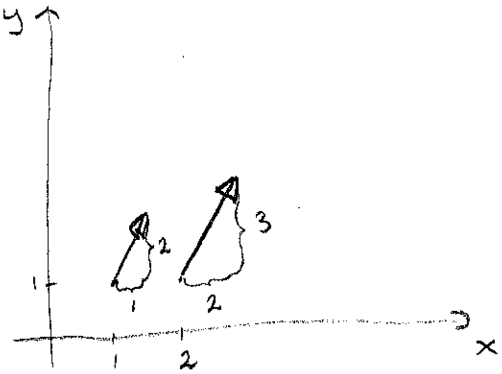
Grundläggande vektoroperationer

Vektorfält

Ex
Hastighetsfält
Kraftfält
Elektriskt fält

$F(x,y) = (xy, x+1)$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Vektoranalys = "Kombination av linjär algebra & analys"



$F(1,1) = (1,2)$

$F(2,1) = (2,3)$

Kurvintegral

Integrera vektorfält,

Lektion 6

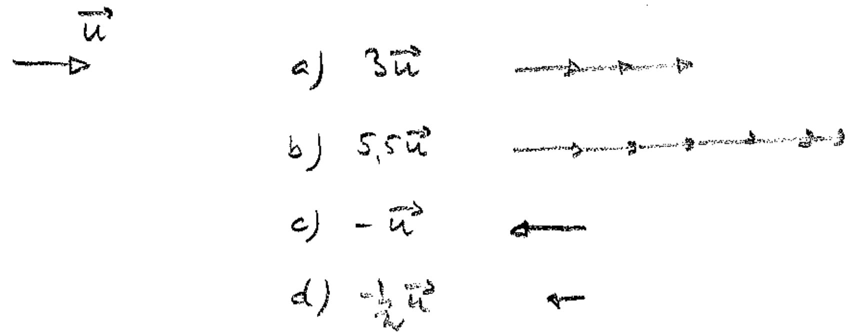
4.1 $\vec{u}$

a) $3\vec{u}$

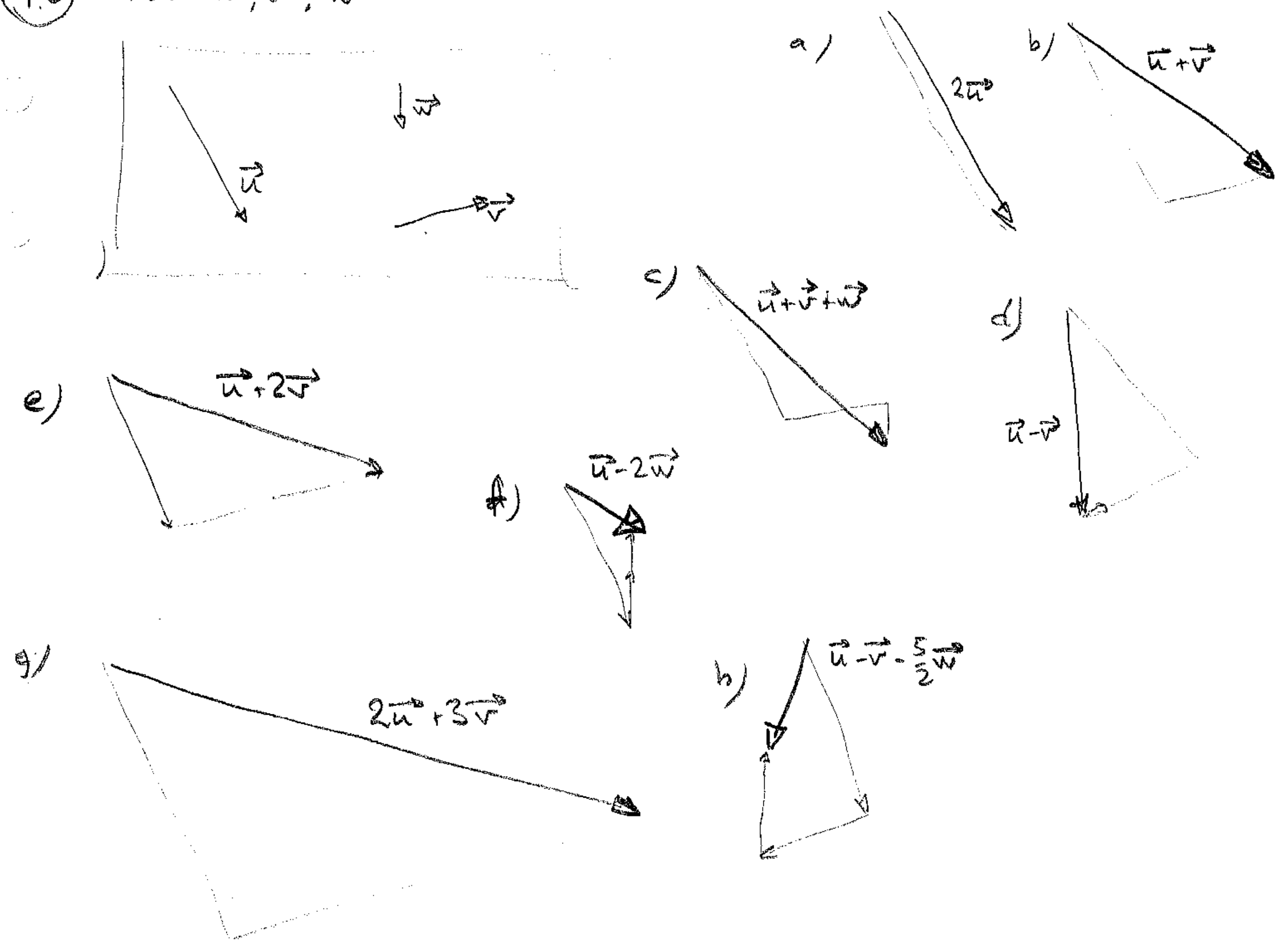
b) $5{,}5\vec{u}$

c) $-\vec{u}$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u}$



4.2 Låt $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$



DISTRIBUTIVA LAGEN

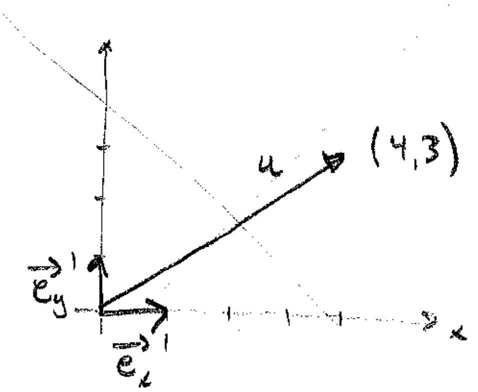
Def: Den räknelag som säger att $a(b+c)=ab+ac$ och $(a+b)\cdot c = ac+bc$.

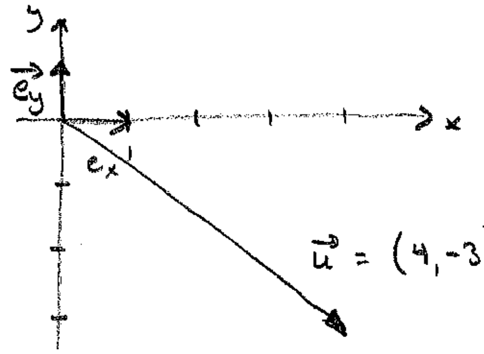
Komm: När denna lag gäller säger man att multiplikationen är distributiv över additionen.

Etym: Latin "distributivus" – "som fördelar".

Lektion 7

(4.5) Rita vektorn $\vec{u} = (4,-3)$ samt basvektorerna $\vec{e}_x$ o $\vec{e}_y$ som spänner upp din ON-bas. Beräkna även längden av $\vec{u}$





$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2+3^2} = \underline{5}$$

(4.6) Låt $\vec{u} = (1,4)$ och $\vec{v} = (2,-2)$. Beräkna i koordinatform

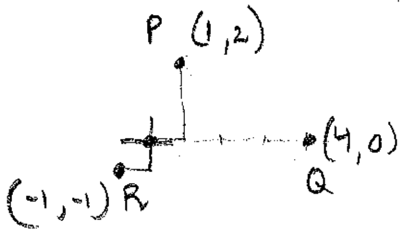
a) $3\vec{u} = (3\cdot 1, 3\cdot 4) = (3, 12)$

b) $\vec{u} + 2\vec{v} = (1+2\cdot 2, 4+2(-2)) = (5, 0)$

c) $-\vec{u} + 3\vec{v} = (-1+3\cdot 2, -4+3(-2)) = (5, -10)$

d) $\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} = \left(1+\frac{3}{2}\cdot 2, 4+\frac{3}{2}\cdot(-2)\right) = (4, 1)$

(4.7)



a) $\overrightarrow{PQ} = (4-1, 0-2) = (3, -2)$

b) $\overrightarrow{QR} = (-1-4, -1-0) = (-5, -1)$

c) $\overrightarrow{RP} = (1-(-1), 2-(-1)) = (2, 3)$

d) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} = (3-(-2), -2-(-3)) = (5, 1)$

(4.8) Visa att punkterna $A=(1,0)$, $B=(4,-2)$ & $C=(6,-\frac{10}{3})$ ligger på en rät linje genom att beräkna koordinaterna för vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB} = (4-1, -2-0) = (3, -2) = 1(3, 2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (6-4, -\frac{10}{3}-(-2)) = (2, -\frac{4}{3}) = \frac{2}{3}(3, -2)$$

$$\underline{\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}}$$ VSV

(1.9) Bestäm y så att de tre punkterna $(-1,2)$, $(0,4)$ och $(3,y)$ ligger på en rät linje.

$A=(-1,2)$

$B=(0,4)$

$C=(3,y)$

$$\overrightarrow{AB} = (0-(-1), 4-2) = (1, 2)$$

$$\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AB} = k(1,2) = (3, y-4)$$

$$\begin{cases} k\cdot 1 = 3 \quad k=3 \\ k\cdot 2 = 3\cdot 2 = y-4 \Rightarrow \underline{y=10} \end{cases}$$

(4.13) Vektorerna $\vec{u}=(7,4)$ och $\vec{v}=(-2,1)$ är givna. Bestäm talet t så vektorn $\vec{u}+t\vec{v}$ blir parallell med $\vec{w}=(1,2)$

$$/\!/ \begin{cases} \vec{u}+t\vec{v} = (7+t\cdot(-2), 4+t) \\ k\cdot\vec{w} = k\cdot(1,2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7-2t = k \\ 4+t = 2k \end{cases}$$

$$15 = 5k \quad k=3$$

$$k=3 \Rightarrow t=2$$

Svar: $t=2$

Vektorerna $\vec{u} = (0,4)$ och $\vec{v} = (-4,3)$. Beräkna

4.11

a) $3|\vec{v}| = 3 \cdot \sqrt{4^2+3^2} = 3 \cdot 5 = 15$

b) $|2\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

c) $|\vec{u}| + |\vec{v}| = 4 + 5 = 9$

d) $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65}$

4.15 Låt $\vec{u} = (2,-1)$, $\vec{v} = (-2,4)$ och $\vec{w} = (-5,7)$. Bestäm de reella talen s och t så att $s\vec{u} + t\vec{v}$ blir dubbelt så lång som $\vec{w}$ men motriktad

$$s(2,-1) + t(-2,4) = -2(-5,7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2s - 2t = 10 \\ -s + 4t = -14 \end{cases} \Rightarrow \quad 6t = -18 \Rightarrow t = -3$$

$$-s + 4\cdot(-3) = -14 \qquad s = 2$$

Svar:
$s = 2$
$t = -3$

Lektion 8

4.19 Vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ har längderna 2 resp 5 l.e. Vinkeln mellan dem är α. Rita figur och bestäm $\vec{u} \cdot \vec{v}$ då

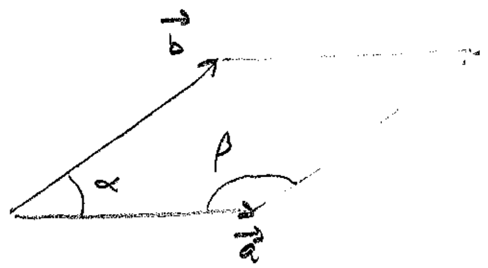
a) $\alpha = 60^\circ \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5$

b) $\alpha = 120^\circ \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 120^\circ = 2 \cdot 5 \cdot -\frac{1}{2} = -5$

c) $\alpha = 0^\circ \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 0^\circ = 2 \cdot 5 \cdot 1 = 10$

d) $\alpha = 90^\circ \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 90^\circ = 2 \cdot 5 \cdot 0 = 0$

4.20 Parallellogrammen i figuren spänns upp av vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$. Bestäm parallellogrammens vinklar och area om $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6\sqrt{3}$



okända:

$\vec{a}$
$\vec{b}$
α
β

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \cos\alpha = 6\sqrt{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{6\sqrt{3}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\cdot(-\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

Lektion 8

4,24
4,25
4,26
4,27
4,28
4,29
4,31
4,39

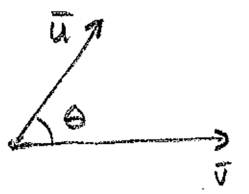
Vektorer, Skalärprodukt

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = (u_1, \dots, u_n) \bullet (v_1, \dots, v_n)$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots + u_n v_n$$

$$= \text{ett tal} = \text{skalär}$$

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = \|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \cos\theta$$

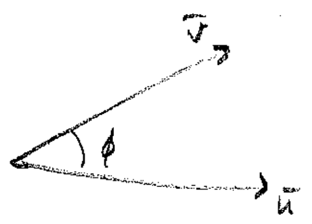


om $\theta = \pi/2$ $(90°)$

$\Rightarrow \cos\theta = 0$

$$\boxed{\therefore \text{ Om } \bar{u} \bullet \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{u} \perp \bar{v}}$$

Skalärprodukt (inre produkt)



$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos\phi$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \Leftrightarrow \bar{u} \perp \bar{v} \quad \text{(ortogonala)}$$

$$\bar{u} \cdot \bar{u} = \|\bar{u}\|^2$$

Normering: Man gör om en vektor så att den får längden 1.

$$\left\| \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} \right\|^2 = \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} \bullet \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \frac{1}{\|\bar{u}\|^2} \bar{u} \bullet \bar{u} = 1$$

Ortogonala baser

$B = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$ är ortogonalbas om $\bar{b}_i \cdot \bar{b}_j = 0 \quad i \neq j$

Om alla $\|b_i\| = 1$ $\Rightarrow$ ON-bas

4.23 Ange om vinkeln mellan de olika paren av vektorer är

spetsig (b (d

trubbig (a (e (f

rät (c

4.24 Följande vektorer är givna: $\bar{u} = (2,-5)$, $\bar{v} = (-10,-4)$ och $\bar{w} = (8,-1)$. Beräkna följande skalärprodukt

a) $\bar{u} \cdot \bar{v} = (2,-5)\begin{pmatrix}-10\\-4\end{pmatrix} = -20+20 = \underline{\underline{0}}$

b) $\bar{u} \cdot \bar{w} = (2,-5)\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix} = 16+5 = \underline{\underline{21}}$

c) $\bar{v} \cdot \bar{w} = (-10,-4)\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix} = -80+4 = \underline{\underline{-76}}$

d) $(\bar{u}+\bar{v}) \cdot \bar{w} = \left((2,-5)+(-10,-4)\right)\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix} = (-8,-9)\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix} = -64+9 = \underline{\underline{-55}}$

4.25 Vektorerna $\vec{u} = (8,15)$ och $\bar{v} = (-12,5)$ är givna. Beräkna

a) $\|\bar{u}\| = \sqrt{8^2+15^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$

b) $\|\bar{v}\| = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

c) $\bar{u} \cdot \bar{v} = (8,15)\begin{pmatrix}-12\\5\end{pmatrix} = -96+75 = -21$

d) $\cos\theta = \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|} = \dfrac{-21}{17 \cdot 13} = -0{,}095 \Rightarrow \theta = 1{,}67$ rad

$\theta = 95{,}45^\circ$

4.26 Beräkna vinkeln mellan följande vektorer

a) $(3,6)$ och $(-2,3)$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 3 \cdot (-2) + 6 \cdot 3 = 12$

$\|\bar{u}\| = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45}$

$\|\bar{v}\| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

$$\cos\theta = \frac{12}{\sqrt{45 \cdot 13}} \Rightarrow \theta = 1{,}05 \text{ rad} \quad \theta = 60^\circ$$

b) $(-3,4)$ och $(12,9)$ $\quad \bar{u} \cdot \bar{v} = -3 \cdot 12 + 4 \cdot 9 = -36 + 36 = 0$

Svar: Vinkelräta $\perp$ $\quad \theta = 90^\circ$

c) $(1,1)$ och $(2,2) \Rightarrow (1,1)$ och $2(1,1)$ är parallella

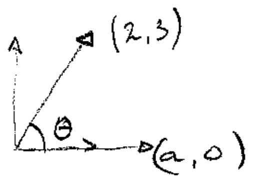
$\Rightarrow \theta = 0^\circ$

d) $(0,3)$ och $(2,0) \Rightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = 0 + 0 = 0$

Svar: vinkelräta $\perp$ $\quad \theta = 90^\circ$

4.27 Bestäm vinkeln mellan vektorerna

$\bar{u} = (2,3)$ och $\bar{v} = (a,0)$, $a > 0$



$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \cos\theta$

$$\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} = \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{2a + 3 \cdot 0}{\sqrt{2^2+3^2} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{13}\,a} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$\theta = 0{,}98 = 56{,}3^\circ$

4,28 Bestäm talet t så att vektorerna $(t,4)$ och $(2,7)$ blir vinkelräta

Lösning $\bar{u}\cdot\bar{v}=0$ ty $\bar{u}\perp\bar{v}$

$$\Rightarrow \quad t\cdot 2+4\cdot 7=0 \Rightarrow t=-\frac{28}{2}=-14$$

4,29 Bestäm talet t så att vektorerna $(t-1,3)$ och $(t,-2)$ blir.

a) vinkelräta $\Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{v}=0$

$$(t-1)\cdot t+3\cdot(-2)=0$$

$$t^2-t-6=0$$

$$t=\frac{1}{2}\pm\sqrt{6,25}$$

$$t=\frac{1}{2}\pm 2\frac{1}{2} \qquad t_1=-2 \quad t_2=3$$

b) parallella $\Rightarrow \bar{u}\bullet\bar{v}=$

$$\bar{u}=(t-1,3) \qquad \|\bar{u}\|=\sqrt{(t-1)^2+3^2}$$

$$\bar{v}=(t,-2) \qquad \|\bar{v}\|=\sqrt{t^2+2^2}$$

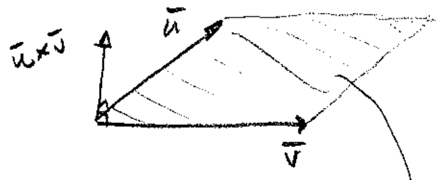
$$\bar{u}\cdot\bar{v}=(t-1)(t)+3\cdot(-2)=t^2-t-6$$

$$\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|}=\frac{t^2-t-6}{}=\frac{(t-3)(t-2)}{\sqrt{((t-1)^2+9)(t^2+4)}}=\frac{(t-3)(t-2)}{(t^2-2t+1+9)(t^2+4)}$$

Tänk k-värde! $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\quad \frac{y_u}{x_u}=\frac{y_v}{x_v} \Rightarrow \frac{3}{t-1}=\frac{-2}{t} \Rightarrow t=0,4$

Vektorer , Vektorprodukt (kryssprodukt)

$\bar{u} \times \bar{v}$



$\boxed{\bar{u} \times \bar{v} \perp \text{ planet som } \bar{u} \text{ och } \bar{v} \text{ spänner upp.}}$

ytan $\boxed{A = \|\bar{u} \times \bar{v}\| \quad \text{längden av kryssprodukten}}$

Ex: $\mathbb{R}^3$

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

koordinater

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_2 u_3 \\ -(u_1 v_3 - v_1 u_3) \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{bmatrix}$$

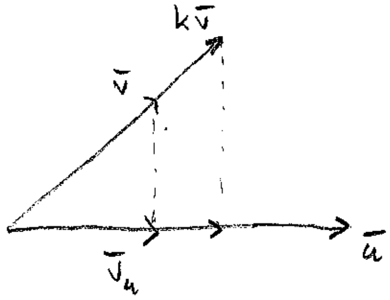
4.31 Beräkna det arbete en kraft på 300 N uträttar om vinkeln mellan förflyttningen och kraften är 30° och den verkar i 40 meter. Vad händer med arbetet om vinkeln ökar eller minskar

$$W = \bar{F} \cdot \bar{s} = |300||40| \cos 30^\circ = 10392 \text{ J}$$ Svar $\underline{\underline{10{,}4 \text{ kJ}}}$

OBS!
Om vinkeln ökar → minskat arbete (oförändrad |kraft|)
Om vinkeln minskar → ökat arbete (oförändrad |kraft|)

Allmänt borde kraften minska i motsvarande grad ⇒ oförändrat arbete!

4.39 * Visa $\bar{u} \cdot (k\bar{v}) = k(\bar{u} \cdot \bar{v})$ (räknelag) med hjälp av figuren nedan och likformighet



$$k = \frac{\|k\bar{v}\|}{\|\bar{v}\|} = \frac{\|k\bar{u}\|}{\|\bar{u}\|} \Rightarrow k\bar{v} = \frac{k\|\bar{u}\|\bar{v}}{\|\bar{u}\|}$$

$$\cancel{\Rightarrow k\bar{v} = \frac{\bar{v}k\bar{u}}{\bar{u}}}$$

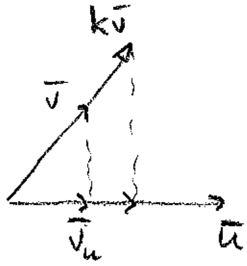
$$\frac{k\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \frac{k\bar{u}}{\|\bar{u}\|} \Rightarrow k\bar{v} = \frac{\|\bar{v}\|k\bar{u}}{\|\bar{u}\|}$$

$$\bar{u} \cdot (k\bar{v}) = \bar{u} \cdot \left(\frac{\|\bar{v}\|k\bar{u}}{\|\bar{u}\|}\right) =$$

$$\frac{\|\bar{v}\|}{\|\bar{u}\|}(\bar{u} \cdot k\bar{u}) =$$

?

(4.39)



Visa! $\bar{u}\cdot(k\bar{v}) = k(\bar{u}\cdot\bar{v})$

Projektionen: $\boxed{\vec{u}_v = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^2}\cdot\vec{v}}$

4.21
4.22
4.32
4.33
4.37
(4,35)

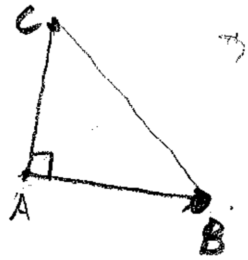
Likformighet

$$k\vec{v}_u = k\,\frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{\bar{u}^2}\cdot\bar{u}$$

Ta ut projektionen utan att räkna

(4,21) I en likbent rätvinklig triangel ABC är längden av sidorna AB och AC två längdenheter. Beräkna

$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 2$



a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\cdot 2\cdot\cos(CAB) = 0$

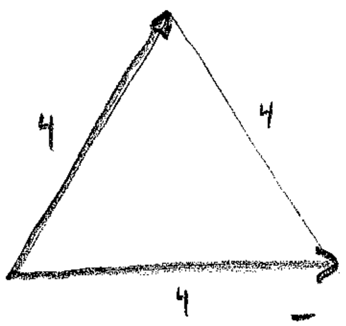
b) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4$

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4$

d) $(\overline{AB}+\overline{AC})\cdot\overline{BC} = 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 90^\circ = 0$

(4.22)

$\bar{v} = (2, 2\sqrt{3})$



$\bar{u} = (4,0)$

a) $\bar{u}\cdot\bar{v} = 4\cdot 4\cdot\cos 60^\circ = 8$

b) $|\bar{u}-\bar{v}| = |\cancel{(4,-4)}| = 4$

c) $\bar{u}^2 = \bar{u}\cdot\bar{u} = (0,4)\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} = \underline{16}$

d) $(2\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = (10, 2\sqrt{3})\begin{pmatrix}2\\-2\sqrt{3}\end{pmatrix} =$

$20 - 4\cdot 3 = 20 - 12 = 8$

Vilken riktningsvektor har linjerna

4.40

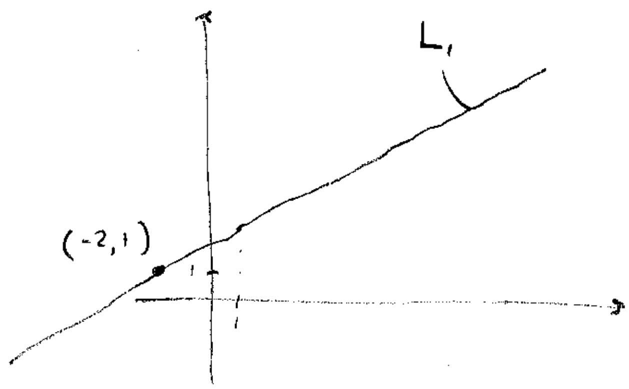
$$L_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}$$

a) $L_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $L_2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.41 Rita linjen

$$L_1: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$



4.42 Vilken rät linje går genom $(1,-4)$ och $(2,0)$.
Ange linjen på parameterform.

Lösn. $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0-(-4)}{2-1} = \dfrac{4}{1} = 4.$

$y = 4x + 2$

$$L_1: \begin{cases} x = t \\ y = 4t + 2 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 + 4t \end{cases}$$

4.45 Hur kan man se om två linjer skrivna på parameterform är parallella med varandra?

Svar: om $\bar{v}_1 = k \cdot \bar{v}_2$ så är de parallella.

4.46 Vilka av nedanstående linjer är inbördes parallella med varandra?

a) $\bar{v}_a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\bar{v}_b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\bar{v}_b \parallel \bar{v}_c$

c) $\bar{v}_c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\bar{v}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\bar{v}_e = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\bar{v}_e \parallel \bar{v}_a$

f) $\bar{v}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\bar{v}_f \parallel \bar{v}_d$

4.47 Vilka av nedanstående punkter ligger på linjen

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$$

✓ a) $(1, -2)$
✓ b) $(-3, 1)$
— c) $(0, -1)$
— d) $(-4, 3)$
✓ e) $(9, -8)$
✓ f) $(-5/3, 0)$

4.48 a)

$y = 2x - 3$

$y = k \cdot x + m$

$x = t$

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b)

$3x - 4y + 2 = 0$

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t + 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

eller om vi vill ha heltal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

MaSpec. Linjer i planet.

(4,50) Ange en linje skriven på parameterform som är vinkelrät mot linjen

$$\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 - 7t \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exempelvis: parallell $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}} t + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

vinkelrät $\Rightarrow$ $\bar{v} \perp \bar{u}$ $\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{v} \cdot t + \bar{p}_0$

$$\Rightarrow \bar{v} \cdot \bar{u} = 0$$

$$(9, -7) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{v} \cdot \bar{u} \Rightarrow \underline{\bar{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} t}$$

(4,51) Linjerna är givna.

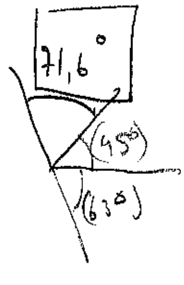
$$L_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases} \Rightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 3 - s \\ y = 3 + 2s \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) I vilken punkt skär linjerna varandra

$$\begin{cases} t = 3 - s \\ 3 + t = 3 + 2s \end{cases}$$

$$3 = 3s \Rightarrow s = 1, \ t = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Välj supplementvinkeln!



b) Vilken är skärningsvinkeln $\quad \bar{v}_1 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \arctan 1 = +45^\circ$

$\bar{v}_2 \Rightarrow k_2 = \frac{2}{-1} = -2 \quad \alpha_2 = \arctan -2 = -63^\circ$

Vektorer i rummet   Lektion 12

$\bar{u} = (6,2,-3) \qquad \bar{v} = (-4,0,3)$

4,55
4,56
4,57
4,58
4,59
4,60
(4,61)
(4,62)
(4,63)

4.55

a) $\bar{u}+\bar{v} = (6-4\,,\,2+0\,,\,-3+3) = (2\,,2\,,0)$

b) $\bar{u}-\bar{v} = (6-(-4), 2-0\,,\,-3-3) = (10\,,2\,,-6)$

c) $3\bar{u}+2\bar{v} = (3\cdot 6+2\cdot(-4)\,,\,3\cdot 2+2\cdot 0\,,\,3\cdot(-3)+2\cdot 3) = (10\,,6\,,-3)$

d) $\|\bar{u}\| = \sqrt{6^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = \underline{\underline{7}}$

e) $\bar{u}\cdot\bar{v} = (\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|\cos\theta =$ eller $) \quad 6\cdot(-4)+2\cdot 0+(-3)\cdot 3 = \underline{\underline{-33}}$

f) $(2\bar{u}-\bar{v})(\bar{u}+v) = (2\cdot 6-(-4)\,,\,2\cdot 2-0\,,\,2\cdot(-3)-3)\cdot(2,2,0) =$

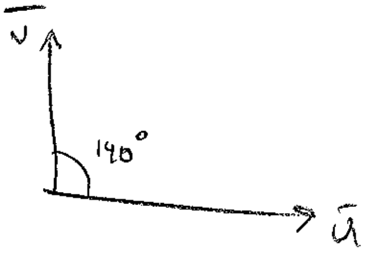
$= (16\,,4\,,-9)\cdot(2\,,2\,,0) = 32+8+0 = \underline{\underline{40}}$

4.56 I ett koordinatsystem har punkten P koordinaterna $(-2,3,2)$ och vektorn $\overrightarrow{PQ}$ koordinaterna $(1,-3,0)$. Bestäm koordinaterna för punkten Q.

$1-2 \qquad -3+3 \qquad 0+2$

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot t + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow t=1 \Rightarrow Q = (-1\,,0\,,2)$$

4,57 Bestäm vinkeln mellan de båda vektorerna $\bar{u} = (1,-2,0)$ och $\bar{v} = (-1,1,1)$



$\|\bar{u}\| = \sqrt{1^2+2^2+0^2} = \sqrt{5}$

$\|\bar{v}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = 1\cdot(-1)+(-2)\cdot 1+0\cdot 1 = -1-2+0 = \underline{-3}$

$\cos\theta = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|} = \dfrac{-3}{\sqrt{15}} = -\sqrt{\dfrac{3}{5}} \Rightarrow \theta = 140{,}8° \rightarrow$ ~~vinkel $180° - 140{,}8°$~~

Svar: ~~39,2°~~

4,58 Vilka av nedanstående vektorer är parallella

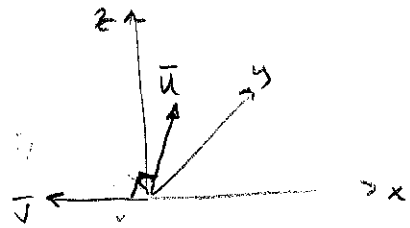
a) $\bar{u}_1 = (2, 0, -3) \ // \ \bar{u}_4 = (-4, 0, 6)$

c) $\bar{u}_3 = (5, 0, 5) \ // \ \bar{u}_5 = (1, 0, 1)$

4,59 Ange två vektorer i rummet, $\bar{u}$ och $\bar{v}$, som är parallella respektive vinkelräta

<u>Ex:</u> a) $\bar{u} = (1, 2, 3) \ // \ \bar{v} = (3, 6, 9)$

b) $\bar{u} = (0, 1, 1) \perp \bar{v} = (1, 0, 0)$

b) 

ty, $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

Lektion 13

Lektion 14

Vektorgeometri i rummet.

4.64 Vilken riktningsvektor har linjen L_1?

$$L_1 : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 5t \\ z = 2 \end{cases} \qquad \text{riktningsvektor } \bar{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.65 Vilka av nedanstående punkter ligger på linjen som har ekvationen:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$

a) $(1, 3, 5)$

Lösning
$x = 1 \Rightarrow t_x = 0$
$y = 3 \Rightarrow t_y \neq t_x$
$z = 5 \Rightarrow t_z \neq t_x$

ej

b) $(-1, -7, 2)$
$x = -1 \Rightarrow t_x = -2$
$y = -7 \Rightarrow t_y = -2$
$z = 2 \Rightarrow t_z \neq t_x, t_y$

ej

c) $(0, -5, 7)$
$x = 0 \Rightarrow t = -1$
$y = -5 \Rightarrow t = -1$
$z = 7 \Rightarrow t = -1$

ja

d) $(3, 1, -2)$
$x = 3 \Rightarrow t = 2$
$y = 1 \Rightarrow t = 2$
$z = -2 \Rightarrow t = 2$

ja

(4.66) Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkterna $(1,1,1)$ och $(0,1,2)$.

$$\bar{v} = \bar{P}_1 - \bar{P}_0 = (0,1,2) - (1,1,1) = (-1,0,1)$$

$$\bar{u} = \bar{v} \cdot t + \bar{P}_0$$

$$\bar{u} = (-1,0,1) \cdot t + (1,1,1)$$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

(4,67) En triangel har hörnen $A = (1,2,0)$, $B = (9,-2,3)$, $C = (0,0,2)$

a) Vad har triangelns sidor för ekvationer?

Lösning: $\overrightarrow{AB} = (9,-2,3) - (1,2,0) = (8,-4,3)$

$$\overline{AB}: \begin{cases} x = 1+8t \\ y = 2-4t \\ z = 3t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{BC} = (0,0,2) - (9,-2,3) = (-9,2,-1)$$

$$\overline{BC}: \begin{cases} x = -9t \\ y = 2t \\ z = 2-t \end{cases} \xrightarrow[(-1\cdot\bar{v})]{\text{ändra}} \begin{cases} x = 9t \\ y = -2t \\ z = 2+t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{CA} = (1,2,0) - (0,0,2) = (1,2,-2)$$

$$\overrightarrow{CA} \begin{cases} x = +t \\ y = +2t \\ z = 2-2t \end{cases}$$

Försök ange samma intervall $0 \leq t \leq 1$ för samtliga sidor!

4.69 Undersök om linjerna L_1 och L_2 skär varandra. Om de gör det, ange skärningspunkten

a) $L_1: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 4-2t \\ z = -2+3t \end{cases}$ $\quad L_2: \begin{cases} x = 3+t \\ y = 4+t \\ z = -t \end{cases}$

Lösning:

$$L_1 = L_2 \ (?) \Rightarrow \begin{array}{l} 1-t = 3+s \\ 4-2t = 4+s \\ -2+3t = -s \end{array} \sim \begin{pmatrix} -s & -t = 2 \\ -s & -2t = 0 \\ s & +3t = 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} s = -4 \\ t = 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (-1, 0, 4) \\ (-1, 0, 4) \end{array}$$

b) $L_1: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3+t \\ z = 2+t \end{cases}$ $\quad L_2: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -7-t \\ z = -t \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2-t & = & 2+s \\ 3+t & = & -7-s \\ 2+t & = & -s \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -s & -t & = 0 \\ s & +t & = -10 \\ s & +t & = -2 \end{pmatrix}$$

Det gör inte!

4,70 Vilken linje genom origo är parallell med linjen genom $A=(1,2,5)$ och $B=(0,-3,4)$

Lösning:

$$\overline{AB} = (0-1, \ -3-2, \ 4-5) = (-1, -5, -1)$$

$$L_1 = \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-5t \\ z = 5-t \end{cases}$$

parallell med denna är linjen

$$\begin{cases} x = t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases}$$

4,71 Bestäm den spetsiga vinkeln mellan linjerna

$$L_1 = \begin{cases} x = 4-t \\ y = 3+4t \\ z = 1-8t \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x = 3-3t \\ y = -6-4t \\ z = -1+12t \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} 4-t = 3-3s \\ 3+4t = -6-4s \\ 1-8t = -1+12s \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{l} 3s - t = -1 \\ 4s + 4t = -9 \\ -12s - 8t = -2 \end{array}\right) \sim$$

Lösn:

$$(-1, 4, -8) \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} = 3 - 16 - 96 = -109$$

$$9 \cdot 13 \cdot \cos\theta = -109$$

$$\cos\theta = -0{,}93$$

$$\theta = 158{,}7^\circ$$

$$\left|\sqrt{1^2+4^2+8^2}\right| = \sqrt{81} = 9$$

$$\left|\sqrt{3^2+4^2+12^2}\right| = \sqrt{169} = 13$$

Svar: vinkeln $= 21{,}3^\circ$

4.72 Vilket är det minsta avståndet från punkten $P = (2,0,1)$ till en linje, L, som går genom punkterna $(2,1,1)$ och $(3,0,1)$.

Lösning:

$A = (2,1,1)$

$B = (3,0,1)$

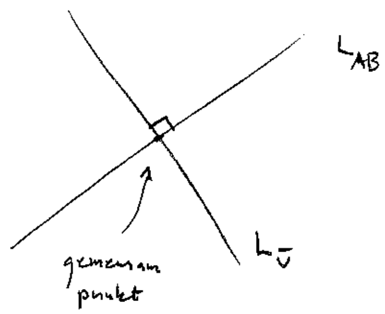
$\overline{AB} = (3-2,\ 0-1,\ 1-1) = (1,-1,0)$

$\left\{\begin{array}{l} \text{riktningsvektor } \bar{v} \perp \overline{AB} \text{ ger} \\ \text{närmaste vägen} \Leftrightarrow \bar{v}\cdot\overline{AB} = 0 \end{array}\right.$

skalärprodukt $= 0$

$$\left\{\begin{array}{l} (v_x, v_y, v_z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ v_x - v_y + 0 = 0 \Rightarrow v_x = v_y \Rightarrow \bar{v} = (1,1,0) \end{array}\right.$$

$$L_{AB}: \left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{array}\right.$$



$$L_{\bar{v}}: \left\{\begin{array}{l} x = 2 + s \\ y = 0 + s \\ z = 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 2+t = 2+s \\ 1-t = 0+s \\ 1 = 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -s + t = 0 \\ -s - t = -1 \\ 0 \quad 0 = 0 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

forts: 4.72

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} s = 1/2 \\ t = 1/2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = 2+t = 2+1/2 = 2{,}5 \\ y = 1-t = 1-1/2 = 0{,}5 \\ z = 1 \qquad\qquad\quad = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2+s = 2+1/2 = 2{,}5 \\ y = 0+s = 0+1/2 = 0{,}5 \\ z = 1 \qquad\qquad\quad = 1 \end{cases}$$

Gemensam punkt $(2{,}5 \,;\, 0{,}5 \,;\, 1)$

Avståndet till punkt $(2 \,;\, 0 \,;\, 1)$ blir

$$\sqrt{(2{,}5-2)^2 + (0{,}5-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Lektion 16

4,90
4,91
4,92
4,93

4.90 Vilka koordinater har $\bar{u} \times \bar{v}$ om

a) $\bar{u} = (0,0,1)$ och $\bar{v} = (0,1,0)$

Lösning:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{(-1,\ 0,\ 0)}$$

b) $\bar{u} = (0,1,0)$ och $v = (0,0,1)$

Lösning

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{(1,\ 0,\ 0)}$$

c) $\bar{u} = (0,1,1)$ och $\bar{v} = (1,1,0)$

Lösning

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{(-1,\ 1,\ -1)}$$

d) $\bar{u} = (1,0,0)$ och $\bar{v} = (2,0,0)$

Lösning

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{(0,\ 0,\ 0)}$$

e) $\bar{u} = (2,3,5)$ och $\bar{v} = (3,2,7)$

Lösning

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{(11,\ 1,\ -5)}$$

f) $\bar{u} = (-1,0,1)$ och $\bar{v} = (-3,1,0)$

Lösning

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{(-1,\ -3,\ -1)}$$

4.91 a) Beräkna vektorprodukten $\bar{w} = (2,-1,0) \times (-1,2,1)$

Lösning $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{(-1\ ,\ -2\ ,\ 3)} = \bar{w}$

b) Kontrollera att $\bar{w}$ är vinkelrät mot båda $\bar{u}=(2,-1,0)$ och $\bar{v}=(-1,2,1)$

Lösning: $\bar{w} \cdot \bar{u} = (-1,-2,3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2+2+0 = 0$ vinkelrät!

$\bar{w} \cdot \bar{v} = (-1,-2,3)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1-4+3 = 0$ vinkelrät!

4.92 Låt $\bar{u} = (-1,5,-5)$ och $\bar{v} = (2,-2,1)$

a) Vilka koordinater har $\bar{u} \times \bar{v}$?

$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -5 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{(-5\ ,\ -9\ ,\ -8)}$

b) Beräkna längden av $\bar{u} \times \bar{v}$.

$\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-9)^2 + (-8)^2} = \sqrt{25+81+64} = \underline{\sqrt{170}}$

c) Hur stor är den area som spänns upp av $\bar{u} \times \bar{v}$

Svar: samma som $\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \sqrt{170}$ ae

d) Beräkna $(2\bar{u}+\bar{v}) \times (\bar{u}-\bar{v}) = (0\ ,\ 8\ ,\ -9) \times (-3\ ,\ 7\ ,\ -6) =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 8 & -9 \\ -3 & 7 & -6 \end{pmatrix} = (-48-(-63), +9\cdot3-0, 24) = (15\ ,\ +27\ ,\ 24)$

4,93 Beräkna arean av den parallellogram som spänns upp av vektorerna $(1,4,-3)$ och $(2,3,-1)$

$$|\bar{u}\times\bar{v}| \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\right| \Rightarrow \left|\left(4\cdot(-1)-3\cdot(-3),\ -3\cdot 2-(-1)\cdot 1,\ 1\cdot 3-2\cdot 4\right)\right|$$

$$= \left|\left(-4+9,\ -6+1,\ 3-8\right)\right| = \left|\left(-5,-5,-5\right)\right| = 5^2+5^2+5^2 =$$

$$\underline{5\sqrt{3}\ \text{a.e}}$$

4,94 Visa att volymen av en parallellepiped som spänns upp av $\bar{u}=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{v}=(x_2,y_2,z_2)$ och $\bar{w}=(x_3,y_3,z_3)$ kan beräknas med absolutbeloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Ledning: Visa först att volymen $V = |\bar{w}_{\bar{u}\times\bar{v}}| \cdot |\bar{u}\times\bar{v}| = \bar{w}\cdot(\bar{u}\times\bar{w})$ –

4.95 Vilken avbildningsmatris speglar en punkt i y-axeln?

Svar: $$\begin{pmatrix}-x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Spegling i y-axel

4.96 Vilken avbildningsmatris projicerar en punkt på x-axeln?

Svar: $$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Rightarrow$$ $p_{11} = 1$, resten noll

Projicering på x-axeln

4.97 Vilken matris speglar först en punkt i y-axeln A och projicerar den sedan på x-axeln B? Testa din matris på punkten (1,2). Vilken punkt avbildades (1,2) på?

Lösn: $$A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$BAx = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$$

Svar:

(4.98) Vilken matris speglar först en punkt i y-axeln och förflyttar sedan den speglade punkten två ggr ursprungsavståndet från origo

A

B

Lös:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

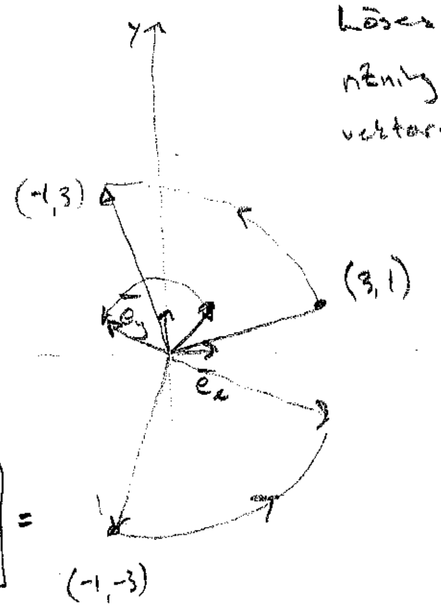
$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Svar:

(4.99) Beskriv den avbildning som matrisen nedan utför.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Löses med hjälp av ritning av tre olika vektoravbildningar.



$$A \cdot \bar{e} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_y \\ e_x \end{bmatrix} =$$

$\Leftrightarrow$ rotation $+90^\circ$