Lektion 9

(3.10) a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

med miniräknaren

($\boxed{2nd} \xrightarrow{MATRIX} \boxed{x^{-1}}$)

↳ EDIT

"MATRIX [A] 2 × 3

Knappa in

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

↳ MATH

↓

rref ("$\boxed{MATRIX}$ $\boxed{ENTER}$")

Då ploppar [A] in

↳ $\boxed{ENTER}$

Svar $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Svar: $x = 3$
$y = -1$

(3.11) a) $\begin{pmatrix} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 16 \\ 8x - 9y - z = 4 \end{pmatrix}$ = miniräknaren $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 16 \\ 8 & -9 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$

(3.11) c $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \\ d = 10 \end{cases}$

3.12 Lös ekvationssystemet.

$$\begin{cases} 3x + y + 6z = 8 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ x + y = 0 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$z = t \Rightarrow$

Svar:

$$\begin{cases} x + 3t = 4 \\ y - 3t = -4 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -4 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

3.13 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y + z = 1 \\ 4x + 4y - z = 8 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$z = 4$

$x + y = 3$

$y = t \rightarrow \begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}$

3.1 Lös ekvationssystemet.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + z = 2 \\ -3x + 4y - 5z = 3 \end{cases}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1} \end{bmatrix} \rightarrow$$

Svar: saknar lösning!

(3.15) Vilket / Vilka av de båda överbestämda ekvationssystemen nedan har en entydig lösning? Bestäm lösningen i de fallen.

a)
$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + 8z = 0 \\ y - z = 5 \\ x + 3z = 1 \end{cases} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TOTALMATRIS

$$z = t \Rightarrow \underline{t=1} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 6 \\ x = -2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ y - z = 3 \\ x + 2z = 5 \end{cases} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

saknar lösn!

TOTALMATRIS

(3.19)
$$\begin{cases} 1 & 1 & -2 & -1 & = 7 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & = 17 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & = 2 \\ 3 & -4 & 1 & 4 & = 0 \end{cases} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_4 = t \\ x_3 = s \\ x_2 = 3 + s + t \\ x_1 = 4 + s \end{cases}$$

oändligt antal lösningar!

Lektion 2

3.1 Vilken typ har matriserna

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

a) typen 2×5

b) Utför additionen $X + Y$

$$X + Y = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

3.2 Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Beräkna $3 \cdot A + (-2) \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 6 & 0 & 19 \end{bmatrix}$

3.3 Låt matriserna nedan vara givna.

$$\underset{2\times 2}{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}, \quad \underset{3\times 2}{B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}} \quad \text{och} \quad \underset{1\times 3}{C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Vilka av följande matrismultiplikationer är möjliga att utföra?

~~AB~~ BA AA CA BC CB

$$BA = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad AA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad CB = (\cdot\ \cdot\ \cdot) \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = (2 \ \ 1)$$

(3.4) Bestäm transponatet till $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & -7 & 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2×6

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -7 \\ -7 & 6 \\ 6 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6×2

(3.6) a) Bestäm A om $A^T = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 32 & 1 & -9 \\ 3 & 8 & 2 & 16 \end{bmatrix}$

3×4

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 4 & 32 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & 16 \end{bmatrix}$$

4×3

AA^T är möjlig!

$$A^T A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 32 & 1 & -9 \\ 3 & 8 & 2 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 4 & 32 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25+16+9+0 & 25+128+3+0 & 15+32+1+0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 156 & 53 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$3 \times 4 \quad 4 \cdot 3 \quad = 3 \times 3$

Miniräknaren ger

$$AA^T = \begin{pmatrix} 50 & 132 & -5 & 12 \\ 132 & 1104 & 60 & -160 \\ -5 & 60 & 14 & 23 \\ 12 & -160 & 23 & 337 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 50 & 111 & 23 \\ 111 & 1122 & 126 \\ 23 & 126 & 333 \end{pmatrix}$$

3.7 a) $(A+B)^T = A^T + B^T$?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T = \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right)^T$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$ vsv

b) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left(\lambda \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 3\lambda & \lambda & 2\lambda \\ \lambda & 2\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3\lambda & \lambda \\ \lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & 3\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \lambda A^T$$

vsv

c) $(AC)^T = C^T \cdot A^T$ $\quad C = B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$(AC)^T = \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}$$

$$C^T A^T = B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}$$ vsv

d) $(A^T)^T = A$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T \right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ vsv.

3.8 Lös ekvationen

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ b \end{pmatrix}$$

$$3a + 6 = 3 \Rightarrow a = -1$$

$$a - 6 = b \quad \Downarrow \quad b = -7$$

Svar $a = -1$, $b = -7$

3.9 Bestäm x och y så att

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x = 1$

$1 - y = -1$

$y = 2$

Svar $x = 1$, $y = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1, \; y = 2$$

Lektion 3

"Matris"

Definition : Rektangulärt schema

Ex: Ekvationssystem kan beskrivas av en så kallad totalmatris

3,13

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y + z = 1 \\ 4x + 4y - z = 8 \end{cases}$$

kan skrivas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Vi löser ekvationssystemet genom att använda gausselimination

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

radekvivalens

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}$$

3.33 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & a-2 & 1 \end{bmatrix} \sim$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{2}{a-2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-\frac{2}{a-2} \\ 0 & 2 & \frac{2}{a-2} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-\frac{2}{a-2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{a-2} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x = 2-\frac{2}{a-2} & a \neq 2 \\ y = \frac{1}{a-2} & a \neq 2 \end{cases}$$

3.34 Hur många lösningar har ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & = 1 \\ -4x_1 & +ax_2 & = b \end{cases} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{b+2}{a-2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{a+b}{2(a-2)} \\ 0 & 1 & \frac{b+2}{a-2} \end{bmatrix}$$

om $a \neq 2$

testa (a,b) är $(3,1)$, $(2,-2)$ och $(2,1)$

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{-2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{-1} \end{bmatrix} \Rightarrow$ Entydig lösning

$$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2-2}{2(2-2)} \\ 0 & 1 & \frac{-2+2}{2-2} \end{bmatrix}}$$

(då $a \neq 2$ måste vi ändra om metoderna)

B) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & a-2 & b+2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ oändligt med lösningar

C) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & a-2 & b+2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ – saknar lösning!

3.37

$$\begin{cases} -x & -y & & = 1 \\ 2x & & -z & = -1 \\ x & -3y & +az & = b \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & a & b \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & a+\frac{1}{2} & b+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & a+2 & b-1 \end{bmatrix} \sim \Bigg[$$

$(a = -2 \quad b \neq 1)$ $\rightarrow$ ingen lösning

$(a = -2 \quad b = 1)$ $\rightarrow$ oändligt med lösningar

$(a \neq -2)$ entydig lösning

Lektion 4

Gå igenom på tavlan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$AB = BA = E$

Alt 1

1) $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

2) $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Alt 2

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ VSV.

Alltså, kontroll.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \ldots$$

Invers matris:	$n \times n$ -matris A är inverterbar om det finns $n \times n$ B så att $AB = BA = E$ B skrivs då A^{-1}.

Hämtat från Lars Filipsson.

Lektion 4 Invers & Determinant

3.38 Skriv ekvationssystemet på matrisform.

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.90 Beräkna

a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{2\times 3}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ går ej att utföra!

3.41 Bestäm inverserna till följande matriser utan räknare

$A^{-1}A = AA^{-1} = E$

a) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & -15 & 3 & 0 \\ -6 & 14 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & -15 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & -42 & -30 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right]$$

Svar $A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

(3.41) Med hjälp av miniräknare ges att

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 10 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(3.42)

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Miniräknaren ger oss inversen och beräkningen ger oss

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/13 \\ -17/13 \\ -1/13 \end{bmatrix}$

(3.43) För vilket "a" har matrisen A nedan ingen invers?

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5-a \end{bmatrix}$.

Lösning

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5-a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5-a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{22}{3} & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5-a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{22}{3} & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5-a} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \ldots \quad a \neq 5 \quad$ om $a = 5 \Rightarrow$ ingen lösning!

3.45

a) $\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right]$ Svar $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

kontroll $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right]$ Svar $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

Koll $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

STÄMMER

Korrekt!

~~Jag gjorde ngt fel ngnstans!~~

3.46

Lektion 5

Determinant

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} 3x + 2y \\ 1x + 4y \end{matrix}$$

FORTSÄTT HÄR.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10$$

Avbildning

avbildning

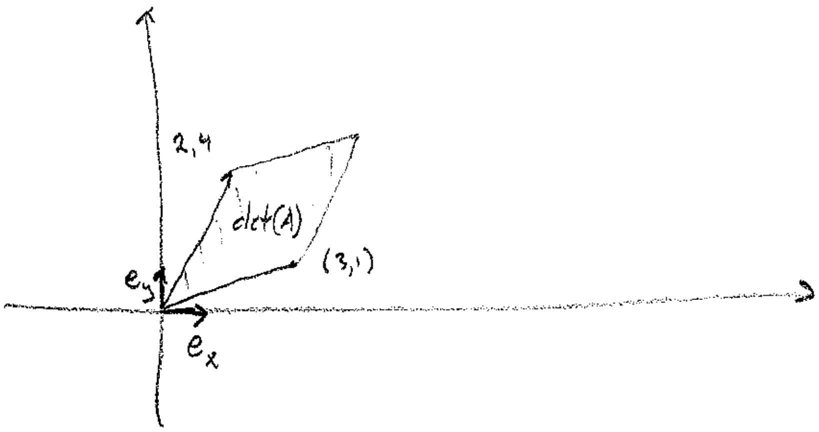
avbild

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

BÖRJA HÄR

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Enhetsmatris



$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x & 0 \\ 0 & e_y \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot E = A$$

(3.51) Beräkna determinanten till matriserna nedan

a) $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$ b) $\det\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} = -2$

b) $\det\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = 18 - 20 = -2$ d) $\det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} = 9$

(3.52) $\begin{cases} 2x & -3y & = 2 \\ -6x & +9y & = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} = 18 - 18 = 0$ ej entydig Lösning!

(3.53)

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 21 + 0 - 0 + 0 - 6 = -26$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 18 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 = 18$

3.55

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 + \cancel{4} - \cancel{4} + 8 - 2 = 3$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 + \cancel{4} - \cancel{4} + 2 - 8 = -3$$

Svar: Determinanten är densamma ! men med omvänt tecken !

3.57 Matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 23 & 23 \\ 40 & 35 \end{bmatrix}$$

a) $\det(A) = 5 - 0 = 5$ b) $\det(B) = -7 - 16 = -23$

d) $\det(AB) = 23 \cdot 35 - 40 \cdot 23 = -115$ d) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$