Lektion 1

Funktion: regel + definitionsmängd

(1) $$f(x) = \sqrt{x-3}$$

Ex $f(7) = \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{}$ → $x \geq 3$: definitionsmängd

≥ 0 D_f

---

(2) $$g(x) = x + \sin x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

mängden av alla reella tal

tillhör

viktigt att funktionen består av båda delar

"naturlig" def.m.

---

(3) $$h(x) = \sqrt{x-3} \quad , \quad x \geq 6$$

Konvention: Om inget D_f är givet antag naturliga (eller största möjliga)

Ex: $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x-6}$

ger $x \geq 2, \; x \neq 6$

Lektion 1

Graf

Ex

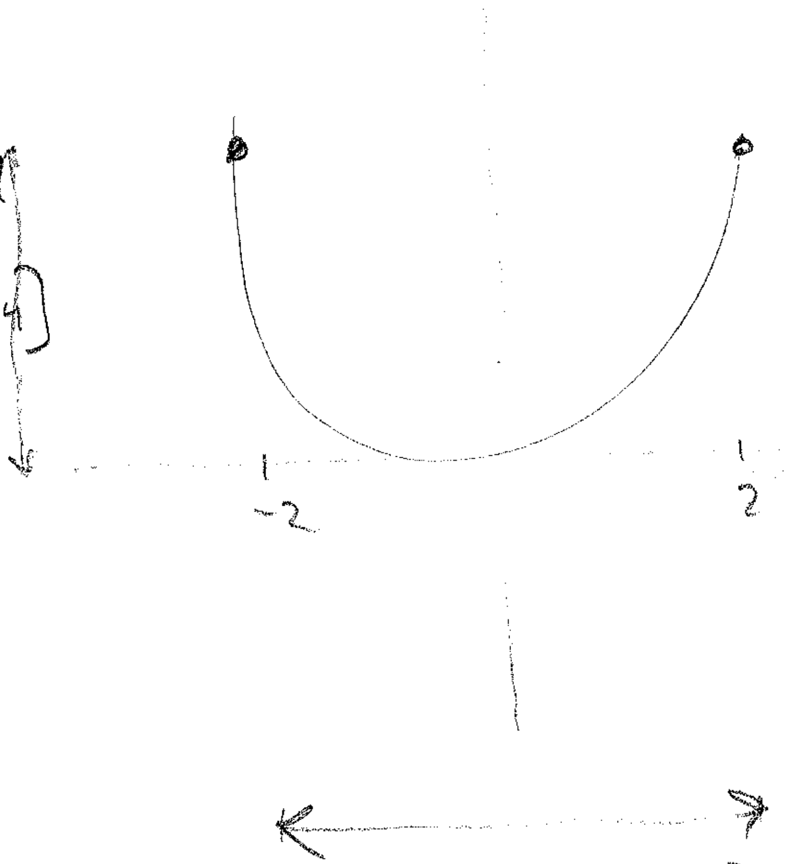
$f(x) = x^2$, $-2 \le x \le 2$ intervall

$y = f(x) = x^2$

"Mängden av alla punkter (x, y) som uppfyller att $y = f(x)$"

"värdemängd"

$V_f = [0,4]$



$D_f = [-2,2]$

kap 1 Lektion 1 Ma Spec.

(1.1) Beräkna $f(\sqrt{5}) - f(\sqrt{2})$ om $f(x) = 1 - x^2$

Definitionsmängd

$D_f = \mathbb{R}$

$V_f =]-\infty, 1]$

Värdemängd

$f(\sqrt{5}) = 1 - \sqrt{5}^2 = 1 - 5 = -4$

$f(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}^2 = 1 - 2 = -1$

$f(\sqrt{5}) - f(\sqrt{2}) = -4 - (-1) = -4 + 1 = \underline{\underline{-3}}$

(1.2) Vilka är polynomfunktioner?

a) $f(x) = \frac{x}{4} + x^2$ polynom

b) $f(x) = 3^x + x^3$ ej

b) $f(x) = \frac{4}{x} + x^2$ ej

d) $f(x) = ax + b$ polynom

(1.3) Funktionen $f(x) = x^2 - 4$ är given

a) Bestäm $f(a+2) - f(a-2) = ((a+2)^2 - 4) - ((a-2)^2 - 4) =$

$= (\cancel{a^2} + 4a + \cancel{4} - \cancel{4}) - (\cancel{a^2} - 4a + \cancel{4} - \cancel{4}) = 4a - (-4a) = 8a$

b) Bestäm de x för vilka $f(x) = 3a(3a+4)$

$x^2 - 4 = 3a(3a+4)$

$x^2 = 3a(3a+4) + 4$

$x^2 = 9a^2 + 12a + 4 = (3a+2)^2$

$x = \pm(3a+2)$ Svar: $x_1 = 3a+2$

$x_2 = -3a-2$

Koll:

x_1: $(3a+2)^2 - 4 = 9a^2 + 12a + \cancel{4} - \cancel{4} = 3a(3a+4)$ OK!

x_2 $(-3a-2)^2 - 4 = 9a^2 + 12a + \cancel{4} - \cancel{4} = 3a(3a+4)$ ok!

kap 7 Lektion 7 Ma Spec.

(1.4) Funktionen u är definierad genom uppräkning:

$$u = \{(x, u(x)) \mid (1,1), (2,3), (3,5), (4,7)\}$$

a) Bestäm $u(2) = \underline{3}$ Svar: $\underline{3}$

b) För vilket x är $u(x) = 5$? Svar: $\underline{x = 3}$

c) Bestäm $u(5) =$ $\boxed{\text{ej definierad}}$

d) Bestäm $u(u(2)) = u(3) = 5$ Svar: $\underline{5}$

(1.5) Funktionerna $f(x) = 3x - 1$ och $g(x) = x^2 - 1$ är givna

a) Bestäm $f(g(x)) = 3(x^2 - 1) - 1 = 3x^2 - 3 - 1 = \underline{3x^2 - 4}$

b) Bestäm $g(f(x)) = (3x-1)^2 - 1 = 9x^2 - 6x + 1 - 1 = \underline{3x(3x-2)}$

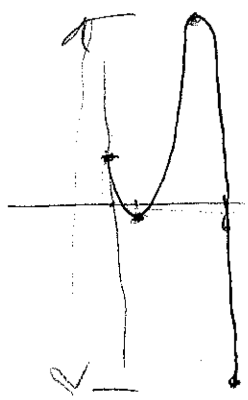
c) Vilken värdemängd har $g(x)$? $g(x) \geq -1$

d) Vilken värdemängd har $g(f(x))$? $g(f(x)) \geq -1$

e) Vilken grad har $f(x) \cdot g(x)$? grad $= 3$

f) Bestäm $f'(g(x)) = \qquad = \underline{\underline{6x}}$

$f(g(x)) = 3x^2 - 4$



(1.6) Bestäm värdemängderna till nedanstående funktioner.

a) $f(x) = 10 - 24x + 15x^2 - 2x^3, \quad 0 \leq x \leq 6$ $f(0) = 10$, $f(6) = -26$

$f'(x) = -24 + 30x - 6x^2 = 0 \iff x^2 - 5x + 4 = 0$

$f''(x) = 30 - 12x$ $x = 2{,}5 \pm 1{,}5$

$f''(1) > 0$ minimum

Svar:

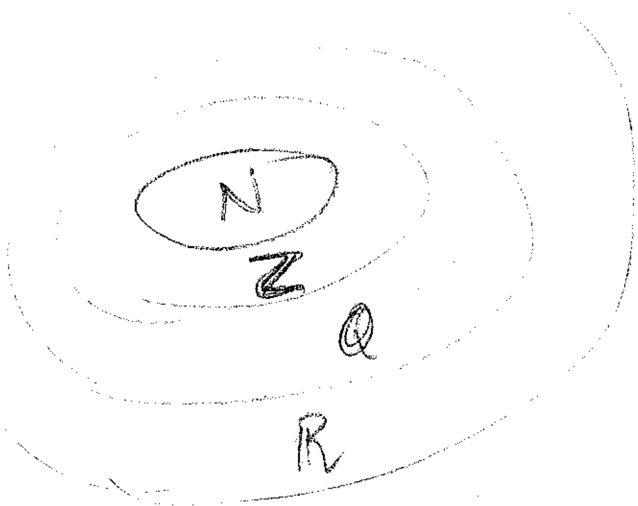
$-26 \leq f(x) \leq 26$

$\begin{cases} x_1 = 1 & \text{ger } y_1 = -1 \\ x_2 = 4 & \text{ger } y_2 = +10 - 96 + 240 - 128 = 28 \end{cases}$

$f''(4) < 0$ maximum

Lektion 2

Mängder - Repetition



uppräknade element

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

$\mathbb{N}$, naturliga tal

$\mathbb{Z}$, hela tal

$\mathbb{Q}$, rationella tal

$= \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

$\mathbb{R}$, reella talen

$\mathbb{C}$, komplexa tal $= \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

(1,7) Skriv med mängdsymboler

a) att talet 3 tillhör de naturliga talen

Svar: $3 \in \mathbb{N}$

b) alla rationella tal större än 3 men mindre eller lika med 5

$\{x \in \mathbb{Q} \mid 3 < x \leq 5\}$

Lektion 2

(1,12) $A = \{0,1,2,3,4\}$ Är påståendet

$\forall x \in A, \exists y \in A : x+y < 5$ sant?

Ex $y=0 \Rightarrow x+0 < 5$ oavsett val av x.

(1,13) Visa att påståendet $\forall x \in R, \exists y \in R : x = y^2$ är falskt!

Ex: $x = -5$, $y^2 \geq 0$

(1,14) Negationen till påståendet i övning (1:13) är

$\exists x \in R, \forall y \in R : x \neq y^2$. Visa att denna är sann.

$x = -1 \Rightarrow x \neq y^2$ för alla y

(1,15) Låt $A = \{1,2,3\}$. Avgör med en motivering sanningsvärdet hos nedanstående påståenden

a) $\exists x \in A, \forall y \in A : x^2 < y+1$ sant

b) $\forall x \in A, \forall y \in A : x^2+y^2 < 12$ falskt

c) $\exists x \in A, \forall y \in A, \exists z \in A : x^2+y^2 < 2z^2$ sant

exempel: $x=1$ om $y=3$ och $z=3$

d) $\forall x \in A, \forall y \in A : x-y \in A$ falskt

e) $\forall x \in A, \exists y \in A : (x-y)^2 \leq 1$ sant

(1,16)

Lektion 2

1.16

a) $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 9$ sant

b) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ sant

c) $\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z}$ sant

d) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{Z} : x^y > 0$ sant

e) $\forall x \in \mathbb{R} : x+1 > x$ sant

f) $\exists x \in \mathbb{R} : e^x = 0$ falskt

g) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x(x+1)}{2} \in \mathbb{Z}$ sant

h) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} : x^2 \geq y^2 + z^2$ sant

i) $\forall x \in \{0,1,2\}, \exists y \in \mathbb{Z} : xy < 0$ falskt

j) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \geq y \land y \geq z \Rightarrow x \geq z$ sant

1.17 Låt $U = \{1, i, -1, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ och avgör sanningsvärdet hos nedanstående påståenden.

a) $x \in U, y \in U \Rightarrow xy \in U$ sant

b) $x \in U, y \in U \Leftrightarrow xy \in U$ ~~sant~~? falskt

$$\underbrace{\begin{cases} x = 2 \\ y = 1/2 \end{cases}}_{\notin U} \Rightarrow xy \in U$$

Lektion 3 kap 1.3

Kontinuitet

Definition: f är kontinuerlig i a om $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

HÄVA. Diskontinuitet.

Att tilldela funktionen ett värde.

Ex: $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x}$, $x \neq 0$

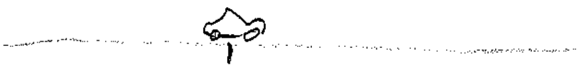
$f(x) = \frac{x(2x+1)}{x} = 2x+1$

$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ $f(0) = 1$

$g(x) = \frac{x^2 + x}{x+1}$, $x \neq -1$

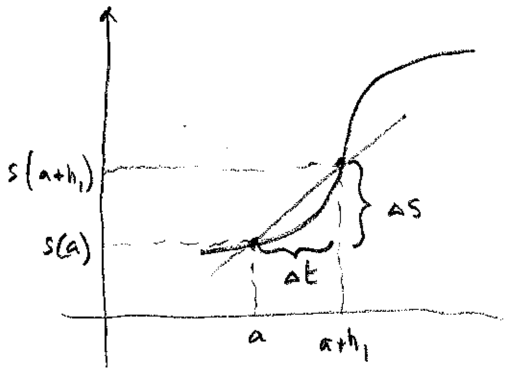
$h(x) = \tan x$, $x \neq \pi/2 + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Derivata



läge $s(t)$

tid



$\bar{v}_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{s(a+h_1) - s(a)}{h_1}$

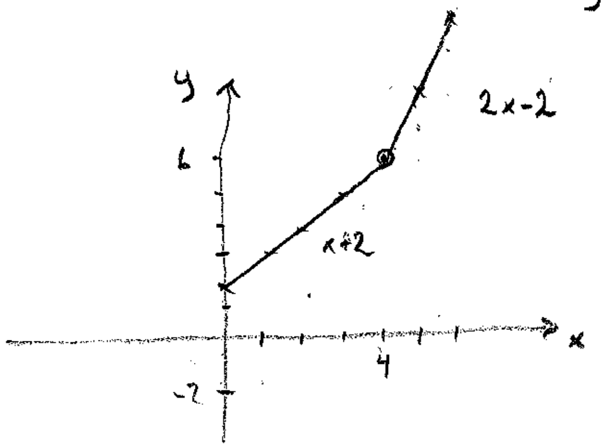
$\bar{v}_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} = \frac{s(a+h_2) - s(a)}{h_2}$

hastighet vid tiden a. $s'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$

Lektion 3

(1,18) Bestäm konstanten k så att funktionen f(x) blir kontinuerlig

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , \ x < 4 \\ 2x-k & , \ x \geq 4 \end{cases}$$



$$2 \cdot 4 - k = 6$$

$$k = 8-6 = \underline{\underline{2}}$$

(1,19) Undersök om funktionen nedan är kontinuerlig

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - x^2 & , \ x < 1 \\ \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 & , \ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = (-0,5)^2 = 0,25$$

$$\frac{3}{2} - 1^2 = 1,5 - 1 = 0,5$$

Svar: Nej. Den är inte kontinuerlig. Diskontinuerlig

(1,20)

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{2x-8}, \ x \neq 4 \qquad g(x) = \frac{x^2+4x}{x-4}, \ x \neq 4$$

$$= \frac{x\cancel{(x-4)}}{2\cancel{(x-4)}} = \frac{x}{2} \qquad = \frac{x(x+4)}{x-4}$$

ej möjlig att häva!

Svar: ja

$$F(x) = \frac{x}{2}$$

$$F(4) = \frac{4}{2} = 2$$

(1,21) Bestäm a så att funktionen f(x), definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 3 & , \ x < -1 \\ 1 + ax - x^2 & , \ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 3 = 2 - 1 - 3 = -2$$

blir kontinuerlig för alla x

$$\Downarrow$$

$$1 + a \cdot (-1) - (-1)^2 = -2$$

$$a \cdot (-1) = -2$$

$$\underline{\underline{a = 2}}$$

Lektion 3

(1,22) Bestäm konstanten k så att $f(x)$ blir kontinuerlig överallt.

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & , x \leq 1 \\ k-2x^2 & , x > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2-1=1$$

$$k-2\cdot 1^2 = 1 \iff \underline{k=3}$$

(1,23) Undersök om $f(x)$ är kontinuerlig överallt.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < -1 \\ -x^2 & , x \geq -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x^2 \text{, positiv } \forall x \neq 0 \\ -x^2 \text{, negativ } \forall x \neq 0 \end{array}$$

Det går inte! <u>Diskontinuerlig</u>

Lektion 4

Kolla på nätet ✓
Egen uppgift.

① **Def:** Vi säger att f är <u>kontinuerlig</u> om

$$f(x) \to f(a) \text{ då } x \to a$$

för alla a i D_f.

② **Def.** Vi säger att f är <u>deriverbar</u> om

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existerar ändligt.}$$

Den har ett ändligt gränsvärde

Den får inte gå mot $+$ eller $-\infty$.

<u>Påstående</u>:

$$\boxed{f \text{ är deriverbar} \Rightarrow f \text{ är kontinuerlig}}$$

Om vi har en funktion som är deriverbar så är f kontinuerlig.

Alt ① Def. för <u>kontinuerlig</u>.
Sätt $x = a+h$. $f(a+h) \to f(a)$ då $h \to 0$

<u>Bevis</u>: Antag att f är deriverbar. Vi vill visa att:

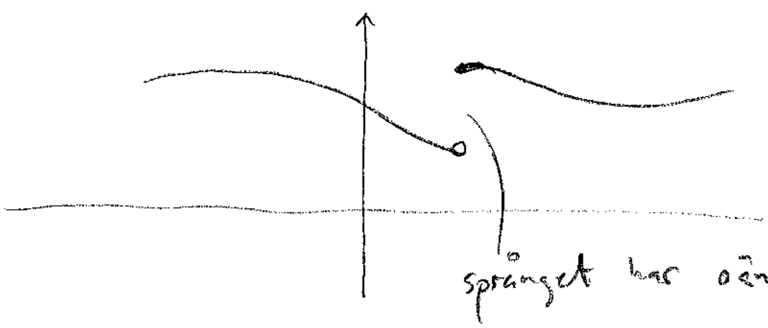
$f(a+h) \to f(a)$ då $h \to 0$ för alla a i D_f

alt. $f(a+h) - f(a) \to 0$ då $h \to 0$ — " —

Då gäller

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \to f'(a) \cdot 0 = \underline{\underline{0}} \quad \text{då } h \to 0$$

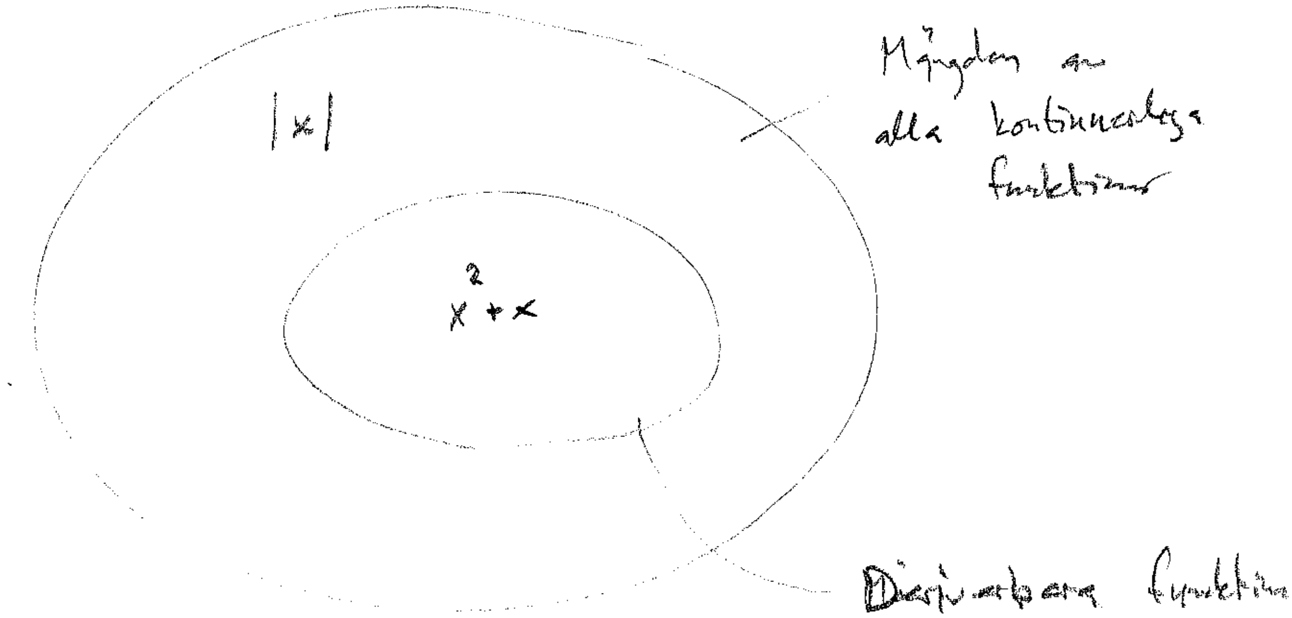
v.s.b.



språnget har oändlig lutning.

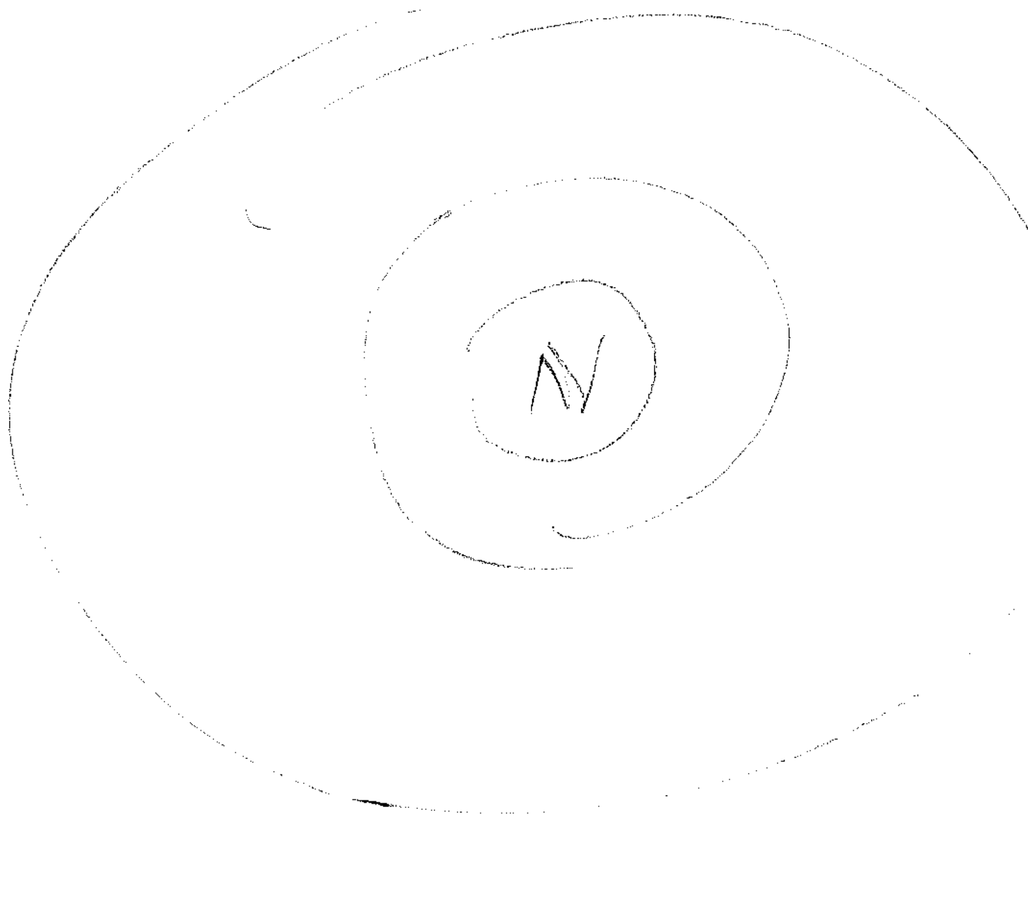
Lektion 4

Genomgång



Påstående

Om f är deriverbar $\Rightarrow$ f är kontinuerlig



Lektion 4

(1.24) Undersök, genom att rita grafen, vilka av nedanstående funktioner som är kontinuerliga, men inte deriverbara.

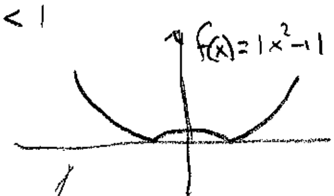
a) $f(x) = |x-2| + 3 \quad \begin{cases} x-2+3, & x \geq 2 \\ -(x-2)+3, & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} x+1, & x \geq 2 \\ 5-x, & x < 2 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f_+(2) = 2+1 = 3 \\ f_-(2) = 5-2 = 3 \end{array}\right\}$ kontinuerlig

$\left.\begin{array}{l} f'_+(2) = 1 \\ f'_-(2) = -1 \end{array}\right\} \quad f'_+(2) \neq f'_-(2)$ ej deriverbar!

b) $f(x) = |x^2-1| \quad \begin{cases} x^2-1, & x \geq 1, \; x < 1 \\ -(x^2-1), & -1 \leq x < 1 \end{cases}$

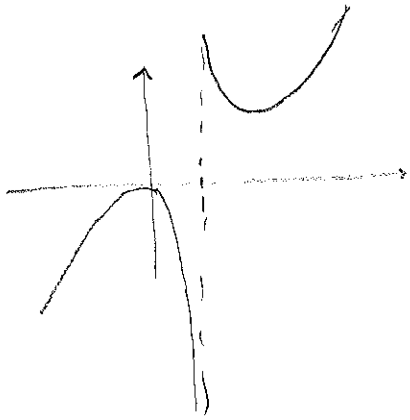
ej deriverbar



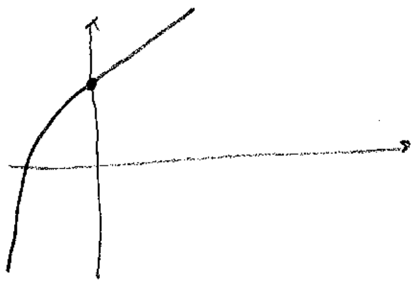
c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}, \quad x \neq 1$

ej deriverbar!

ej kontinuerlig!



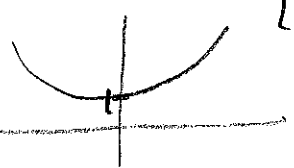
d) $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < 0 \\ 4+x-x^2, & x \geq 0 \end{cases}$



Kont. $\begin{cases} f_-(0) = 0+4 = 4 \\ f_+(0) = 4+0-0 = 4 \end{cases}$

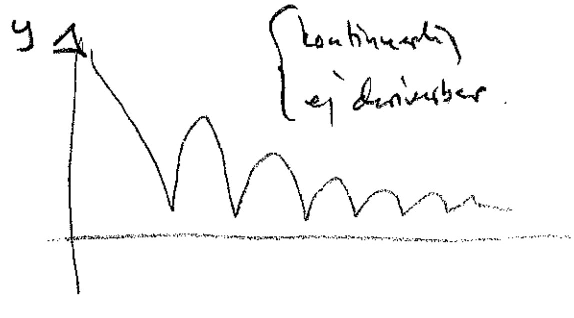
Deriverbar $\begin{cases} f'_+(0) = 1 \\ f'_-(0) = 1-2 \cdot 0 = 1 \end{cases}$

e) $f(x) = |x^2+1|$ $\begin{cases} \text{Deriverbar} \\ \text{Kontinuerlig} \end{cases}$

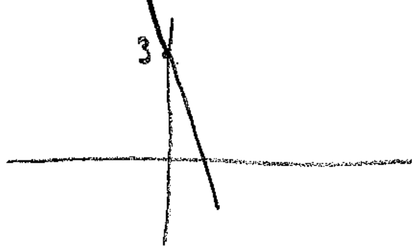


f) $f(x) = e^{-0,1x} \cdot |\sin x|$

$\begin{cases} \text{kontinuerlig} \\ \text{ej deriverbar} \end{cases}$



(1,25) Bestäm konstanterna a & b så att funktionen f(x) blir deriverbar överallt. Rita sedan grafen.



$$f(x) = \begin{cases} ax+b & , x<0 \\ x^2-4x+3 & , x \geq 0 \end{cases}$$

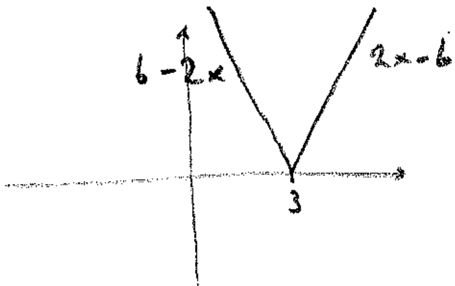
$$f(0) = \begin{cases} b & , x<0 \\ +3 & , x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow b = 3$$

$$f'(0) = \begin{cases} a & , x<0 \\ 2\cdot 0-4 & , x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow a = -4$$

Svar: $\boxed{\overset{a}{-4}x + \overset{b}{3}}$

(1,26) Rita grafen till funktionen $f(x) = |2x-6|$ och visa att den är kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$, men inte deriverbar

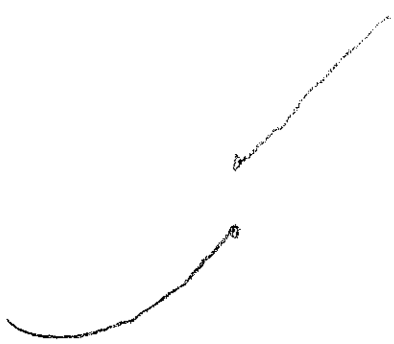
$$f(x) = \begin{cases} 2x-6 & , x \geq 3 \\ 6-2x & , x<3 \end{cases}$$



$$f'_{-}(3) = \begin{cases} 2 & , x\geq 3 \\ -2 & , x<3 \end{cases}$$

(1,27) Undersök om f(x) är deriverbar. Om den är det, derivera.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & , x<2 \\ \frac{x^2}{4} & , x\geq 2 \end{cases}$$



$$f(2) = \begin{cases} 1 & , x<2 \\ \frac{2\cdot 2}{4} = 1 & , x\geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & , x<2 \\ \frac{x}{2} & , x\geq 2 \end{cases}$$

1,28 Skriv funktionen $f(x) = |x-2|$ som en intervallfunktion

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$$

1,29 Lös absolutbeloppsekvationerna nedan

a) $|2x-6| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 2x-6 = 10, & x \geq 3 \Rightarrow \underline{x_1 = 8} \\ -(2x-6) = 10, & x < 3 \Rightarrow \underline{x_2 = -2} \end{cases}$

b) $|x-2|+1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2+1 = 0, & x \geq 2 \Rightarrow x = 1 \text{ falskt} \\ 2-x+1 = 0, & x < 2 \Rightarrow x = 3 \text{ falskt} \end{cases}$

c) $11 - |x-1| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 11-(x-1) = 5, & x \geq 1 \Rightarrow \underline{x = 7} \\ 11+(x-1) = 5, & x < 1 \Rightarrow \underline{x = -5} \end{cases}$

d) $-|3-x|+1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -(3-x)+1 = 0, & x < 3 \Rightarrow \underline{x = 2} \\ (3-x)+1 = 0, & x \geq 3 \Rightarrow \underline{x = 4} \end{cases}$

1.32 För vilka x är $|x|+4 = |6-3x|-4$?

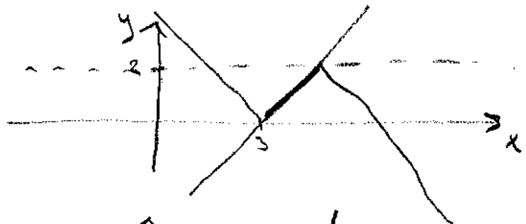
$$f(x) = \begin{cases} x+4 = 6-3x-4, & 0 \leq x < 2 \\ x+4 = -(6-3x)-4, & x \geq 2 \\ -x+4 = 6-3x-4, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x = -2 & \Leftrightarrow & x = -\frac{1}{2} \text{ falskt} \\ 14 = 2x & \Leftrightarrow & \underline{x = 14/2 = 7} \\ 2x = -2 & \Leftrightarrow & \underline{x = -1} \end{cases}$$

1.33 För vilka x är:

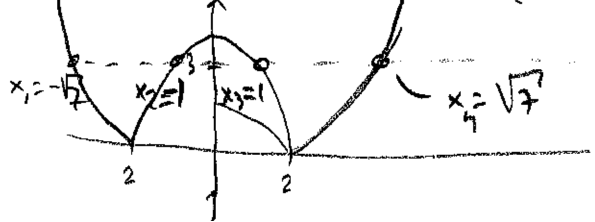
a) $|x-3| = 2 - |x-5|$

Grafiskt $\underline{3 \leq x \leq 5}$



b) $|x^2-4| = 3$

$$\begin{cases} x^2-4 = 3 & x < -2, x \geq 2 \\ 4-x^2 = 3 & -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



1.33

c) $|x^2 - 9| = |x+2| + 5$

$$\begin{cases} 1)\ x^2 - 9 = x + 2 + 5, & x \geq 3 \\ 2)\ 9 - x^2 = x + 2 + 5, & -2 < x < 3 \\ 3)\ 9 - x^2 = -x - 2 + 5, & -3 < x < -2 \\ 4)\ x^2 - 9 = -x - 2 + 5, & x < -3 \end{cases}$$

1) $x^2 - x - 16 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2}$ $\left(x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{65}}{2}\right.$ falsk$\left.\right)$

2) $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \ x_2 = -2$

3) $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x_1 = 3), \ x_2 = -2$

falsk

4) $x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, \ (x_2 = 3)$

falsk

Svar

$x_1 = -4$

$x_2 = -2$

$x_3 = 1$

$x_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2}$

Lektion 5

1.36 Derivera funktionerna

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

b) $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$

$f'(x) = \frac{1\cdot(x+3) - 1\cdot(x+2)}{(x+3)^2} \cancel{= \frac{x+3-x-2}{(x+3)^2}}$

$= \frac{1}{(x+3)^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2+4}{x-1}$

$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+4)(1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-4}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-4}{(x-1)^2}$

d) $f(x) = \frac{x}{(2x-1)^2}$

$f'(x) = \frac{1(2x-1)^2 - 2(2x-1)\cdot(2)\cdot x}{(2x-1)^4} = \frac{4x^2 \cancel{-4x} + 1 - 8x^2 \cancel{+4x}}{(2x-1)^4}$

$= \frac{-4x^2+1}{(2x-1)^4} = \frac{-(4x^2-1)}{(2x-1)^4} = \frac{-(2x+1)\cancel{(2x-1)}}{(2x-1)^{\cancel{4}\,3}} =$

$= \frac{-2x-1}{(2x-1)^3}$

Lektion 5

(1.38) Vilka asymptoter har funktionerna

a) $f(x) = \dfrac{4}{3-x}$, $x \neq 3$. Svar $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$, $x \neq 1$, $x \neq 2$ **Svar:** $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

(1.39) Vilka asymptoter har kurvorna till nedanstående rationella funktioner?

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \Rightarrow \dfrac{1}{1+0} = 1$ Svar $\begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ $\left(f(x) = \dfrac{x}{x+1} \right)$

$x \neq -1$

b) $f(x) = \dfrac{6x^2}{1-4x^2}$ $x \neq \pm \frac{1}{2}$ Svar $\begin{cases} x = \pm 1/2 \\ y = -3/2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \dfrac{6}{\frac{1}{x^2} - 4} = \dfrac{6}{-4} = -\dfrac{3}{2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x-1} = \dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} + \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{1}{l}{x} & \\ \hline x^2 - x + 1 & x - 1 \\ \hline -(x^2 - x) & \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 & \end{array}$$

RESTTERM

Svar: $x = 1$ $y = x$

d) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$, $x \neq 0$ Svar; $x = 0$, $y = x + 2$

$= \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} = \underline{x + 2} + \dfrac{1}{x} =$

$\to 0$

e) $f(x) = \dfrac{x(x-4)}{2(2-x)} = \dfrac{x^2 - 4x}{4 - 2x}$, $x \neq 2$ **Svar:** $x = 2$, $y = 2 - \frac{x}{2}$ OBS!

fel i text?

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \dfrac{x - 4}{\frac{4}{x} - 2} = -\dfrac{x}{2} + 2$

Lektion 5

1.39

f) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+3}{x-1}$

$$\begin{array}{l} 2x-1 \\ \hline 2x^2-3x+3 \;\; \boxed{x-1} \\ (2x^2-2x) \\ \hline 0 \;\; -x+3 \\ -(-x+1) \\ \hline 0 \;\; 2 \end{array}$$

$= 2x-1 + \dfrac{2}{x-1}, \quad x \neq 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} = 2x-1$

Svar $x=1$
$y=2x-1$

g) $f(x) = \dfrac{6+4x-x^2}{x+1}, \quad x \neq -1$

$$\begin{array}{l} -x+5 \\ \hline -x^2+4x+6 \;\; \boxed{x+1} \\ -(-x^2-x) \\ \hline 0 \;\; +5x+6 \\ -(5x+5) \\ \hline +1 \end{array}$$

$f(x) = -x+5+\dfrac{1}{x+1}$

Svar: $x=1$
$y=-x+5$

h) $f(x) = \dfrac{2x^3-3x^2-x+3}{x^2-1}, \quad x \neq \pm 1$

$$\begin{array}{l} 2x-3 \\ \hline 2x^3-3x^2-x+3 \;\; \boxed{x^2-1} \\ -(2x^3+0-2x) \\ \hline 0 \;\; -3x^2+x+3 \\ -(-3x^2+0+3) \\ \hline 0 \;\; x \;\; 0 \end{array}$$

$= 2x-3+\dfrac{x}{x^2-1}$

Svar: $x=\pm 1$
$y=2x-3$

i) $f(x) = \dfrac{3x^3-4x^2+2}{x^2+1}, \quad \cancel{x \neq \pm 1}$

$$\begin{array}{l} 3x-4 \\ \hline 3x^3-4x^2+0+2 \;\; \boxed{x^2+1} \\ -(3x^2+0+3x+0) \\ \hline 0 \;\; -4x^2-3x+2 \\ -(-4x^2+0-4) \\ \hline 0 \;\; -3x+6 \end{array}$$

$= 3x-4-\dfrac{3x-6}{x^2+1}$

Svar: $\cancel{x=\pm 1}$
$y=3x-4$

j) $f(x) = \dfrac{x^3-5x^2+6x-2}{x^2-4x+3} = \dfrac{x^3-5x^2+6x-2}{(x-3)(x-1)}$

$x \neq 3$
$x \neq 1$

$$\begin{array}{l} x^2-4x+2 \\ \hline x^3-5x^2+6x-2 \;\; \boxed{x-1} \\ -(x^3-x^2) \\ \hline 0 \;\; -4x^2+6x-2 \\ -(-4x^2+4x) \\ \hline 0 \;\; 2x-2 \\ -(2x-2) \end{array}$$

$= \dfrac{(x^2-4x+2)\cancel{(x-1)}}{(x-3)\cancel{(x-1)}} =$

$$\begin{array}{l} x-1 \\ \hline x^2-4x+2 \;\; \boxed{x-3} \\ -(x^2-3x) \\ \hline -x+2 \\ -(-x+3) \\ \hline 0 \;\; -1 \end{array}$$

$= x-1-\dfrac{1}{x-3}$

Svar: $x \neq 3$

1,40 "Kortdivision" $6\,\cancel{\sqrt{2x-x^2} = \frac{x}{2}(2-x)}$

$$\text{Utveckla}: \left(\frac{x^2}{4-x}\right): = x^2 + \overbrace{x(4-x) - x(4-x)}^{\text{addera noll}} =$$

$$= \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 4x \quad -x(4-x) =$$

$$= 4x \overbrace{+4(4-x) - 4(4-x)}^{\text{addera noll}} - x(4-x) =$$

$$= \cancel{4x} - \cancel{4x} + 16 \quad -4(4-x) - x(4-x) \quad . \ \underline{\text{KLART}}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{4-x} = -x - 4 + \frac{16}{4-x}} \qquad x \neq 4$$

Finn det några stället ?

$$f'(x) = -1 + \frac{16}{(4-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{om} \quad (4-x)^2 = 16$$

$$4-x = \pm 4$$

$$x = 0$$

$$x = 8$$

$$f''(0) = +\frac{32}{(4-0)^3} > 0 \quad , \text{minimum}$$

$\Rightarrow$ Kolla gränserna $-3 \leq x \leq 3$

$$f(3) = \frac{3^2}{1} = 9 \quad \longleftarrow \text{största värde.}$$

$$f(-3) = \frac{(-3)^2}{7} = \frac{9}{7}$$

Lektion 5-6

1.40 Ange en funktion med asymptoterna $y=2$, $x=1$ o $x=3$

Svar: $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x-3)(x-1)}$, ty $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{2\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-4\frac{x}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \dfrac{2}{1-\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}} = 2$

$x \neq 3 \quad x \neq 1$

Extra

1.41 Vilket största värde har funktionen

$f(x) = \dfrac{x^2}{4-x}$; $x \neq 4$ i intervallet $-3 \le x \le 3$

$\boxed{\text{Alternativ kortdivision}}$

$= x^2 + x(4-x) - x(4-x) = 4x - x(4-x) =$

$= 4x + 4(4-x) - 4(4-x) - x(4-x) = 16 - 4(4-x) - x(4-x)$

$= -x - 4 + \dfrac{16}{4-x}$

$x \neq 4$

$y = -x-4+\dfrac{16}{4-x}$

$x = 3 \Rightarrow y = -7+16 = 9$

$x = -3 \Rightarrow y = 3-4+\dfrac{16}{7} < 9$

1.42 Ange asymptoter och eventuella extrempunkter till funktionen

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to\infty} = \dfrac{1/x}{1-1/x^2} = 0$

Svar: asymptot $y=0$

$f'(x) = \dfrac{(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0$ om $x = \pm 1$

$f(1) = \frac{1}{2}$

$f(-1) = -\frac{1}{2}$

Svar: $(1, \frac{1}{2})$, $(-1, -\frac{1}{2})$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$, $x \neq \pm 2$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{1/x}{1-4/x^2} = 0$

Svar $x = \pm 2$, $y = 0$

$f'(x) = \dfrac{(x^2-4) - 2x^2}{(x^2-4)^2} =$

$f'(x) = \dfrac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = 0$

ej def. $x = \pm 2$

Lektion 6

Exempel 1.21

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{x+1}$$ polynomdivision

Utveckla täljaren $= 2x^2 + x \quad -2x(x+1) \quad + 2x(x+1) = -x + 2x(x+1)$

$= \cancel{-x} + \cancel{1}(x+1) - 1(x+1) + 2x(x+1) = 1 - 1(x+1) + 2x(x+1)$

dvs $\dfrac{2x^2+x}{x+1} = 2x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

Exempel: 1,23 Vilka extrempunkter har funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 14}{1-x}$$

Utveckla täljaren $= x^2 - 6x + 14 + x(1-x) - x(1-x)$

$\left(= \cancel{x^2} - 6x + 14 - \cancel{x^2} + x \quad - x(1-x) \right)$

$= -5x + 14 \quad - x(1-x)$

$= \cancel{-5x} + 14 \quad -5(1 - \cancel{x}) + 5(1-x) - x(1-x)$

$= 9 + 5(1-x) - x(1-x)$

KORTDIVISION

$$f(x) = -x + 5 + \frac{9}{1-x}$$

Lektion 6

(1.43) Bestäm lokala maxima och minima till funktionen

$$f(x) = \frac{6+2x-x^2}{2x}, \quad x \neq 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{6/x + 2 - x}{2} = \underline{\underline{-\frac{x}{2}+1}}$$

$$f'(x) = \frac{(2-2x)\cdot 2x - 2(6+2x-x^2)}{4x^2} = \frac{\cancel{4x} - 4x^2 - 12 \cancel{-4x} + 2x^2}{4x^2} =$$

$$= -\frac{2x^2+12}{4x^2} = -\frac{x^2+6}{2x^2} = 0 \text{ om } x^2+6=0$$

Inga extrempunkter! — x = imaginärt.

(1.44*) $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x^2+1}$, $a, b \in \mathbb{R}$ är given.

a) Vilken vågrät asymptot har funktionen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{b}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = a$$

b) Bestäm när funktionen har en enda extrempunkt och ange dess koord.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{2ax(x^2+1) - 2x(ax^2+b)}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\cancel{2ax^3} + 2ax - \cancel{2ax^3} - 2bx = 0 \Rightarrow \underset{=0}{x} \cdot \underset{\neq 0}{(2a-2b)} = 0 \qquad b \neq a$$

enda nollställe

$$f(0) = \frac{0+b}{0+1} = b$$

Svar $(0; b)$

c) $$f'(x) = \frac{x(2a-2b)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2a-2b)(x^2-1)^2 - \underbrace{2\cdot 2x(x^2+1)\cdot x(2a-2b)}_{=0 \text{ om } x=0}}{(x^2-1)^4} = \boxed{} = 2a-2b$$

$f''(0)$

$$\begin{cases} f''(0) > 0 \text{ om } a > b & \text{minimum} \\ f''(0) < 0 \text{ om } a < b & \text{maximum} \end{cases}$$

Lektion 6

1.45*

2

Om tangenter drages till kurvan $y = \frac{1}{x^2+1}$ så skär de y-axeln i en punkt S. Punkten S är beroende av tangeringspunktens x-värde. Vilket är det största avståndet mella S och origo?

Lösn: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{4} = y_1$

$(\sqrt{3}; \frac{1}{4})$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$ Asymptot: $y = 0$ $k = -\frac{\sqrt{3}}{8}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ extrempunkt

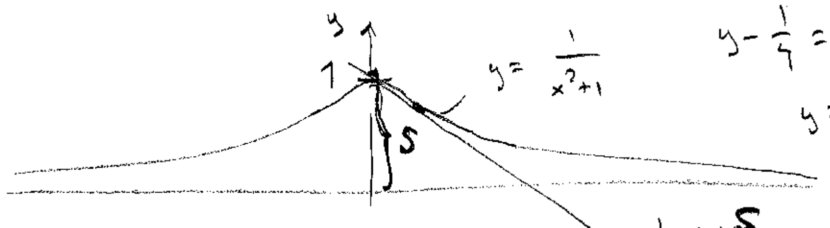
$f(0) = 1$ $f''(0) < 0$ maximum

Enpunktsform

$y - \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{8}(x - \sqrt{3})$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{8}x + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{5}{8}$



$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = f'(\sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{(3+1)^2}$ $k = f'(x)$

$k = -\frac{\sqrt{3}}{8}$

$y = \left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) \cdot x + S \Rightarrow y = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 0 + S$

Maximera $y \Rightarrow y' = D\left(\frac{-2x^2}{(x^2-1)^2} + S\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{-4x(x^2-1)^2 - 2 \cdot 2x(x^2-1) \cdot (-2x^2)}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$-4x(x^2-1)^2 + 8x^3(x^2-1) = 0 \Rightarrow \cancel{-4x^5} + 8x^3 - 4x + \cancel{8x^5} - 16x^3 - 8x^3$

$= 4x^5 - 8x^3 - 12x = x(4x^4 - 8x^2 - 12)$ $x^2 = z$

$z^2 - 2z - 3 = 0$

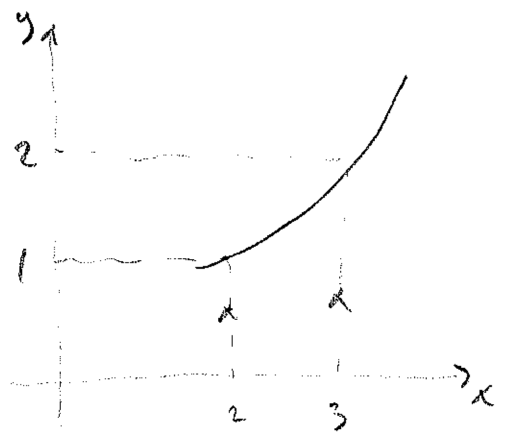
$z = 1 \pm \sqrt{4}$

$z = -1$, $z = 3$

Lektion 7

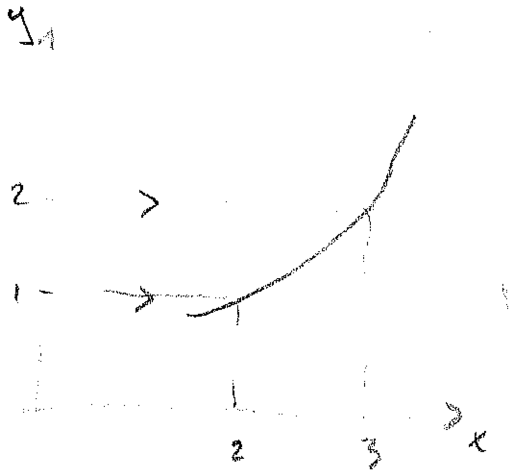
Invers funktion

funktion f



$f(2) = 1$

$f(3) = 2$



$f^{-1}(1) = 2$

$f^{-1}(2) = 3$

Frågor:

- regel för f^{-1}?
- grafen för f^{-1}?
- existerar alltid f^{-1}?

(1.47) c) $f(x) = 6x - 0{,}2$ $\quad f(g(x)) = 6\,g(x) - 0{,}2 = x$

$$6\,g(x) = x + 0{,}2$$

$$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{x}{6} + \frac{1}{30}$$

d) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x}{3}$ $\quad f(g(x)) = \frac{1}{2} + \frac{2\,g(x)}{3} = x$

$$\frac{2\,g(x)}{3} = x - \frac{1}{2}$$

$$2g(x) = 3x - \frac{3}{2}$$

$$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{3x}{2} - \frac{3}{4}$$

Bestäm $f^{-1}(2)$ om $f(x) = 8x$

(1.48) $f(g(x)) = 8\,g(x) = x$

$$g(x) = \frac{x}{8}$$

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow f^{-1}(2) = g(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

(1.49) Bestäm $f^{-1}(3)$ om

a) $f(x) = 1 - x \Rightarrow f(g(x)) = 1 - g(x) = x$

$$f^{-1}(x) = g(x) = 1 - x$$

$$f^{-1}(3) = g(3) = 1 - 3 = -2$$

b) $f(x) = \frac{x}{2} - 3 \Rightarrow f(g(x)) = \frac{g(x)}{2} - 3 = x$

$$f^{-1}(x) = g(x) = 2(x+3)$$

$$f^{-1}(3) = 2(3+3) = 2 \cdot 6 = 12$$

c) $f(x) = x^2 - 1,\ x > 0 \Rightarrow f(g(x)) = (g(x))^2 - 1 = x$

$$(g(x))^2 = x + 1$$

$$f^{-1}(x) = g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x > 0 \\ -\sqrt{x+1} & \text{(ej definierad)} \end{cases}$$

$$f^{-1}(3) = g(3) = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

d) $f(x) = \sqrt{x+4} \Rightarrow f(g(x)) = \sqrt{g(x)+4} = x,\ x \geq 4$

$$g(x) + 4 = x^2$$

$$f^{-1}(x) = g(x) = x^2 - 4$$

$$f^{-1}(3) = g(3) = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

1.50 Lös ekvationen $f(a) = f^{-1}(a)$ om $f(x) = 2x-2$

$$f(g(x)) = 2 \cdot g(x) - 2 = x$$

$$g(x) = \frac{x+2}{2}$$

$$\begin{cases} f^{-1}(a) = g(a) = \frac{a+2}{2} \\ f(a) = 2a-2 \end{cases}$$

$$f^{-1}(a) = f(a) \iff \frac{a+2}{2} = 2a-2$$

$$a+2 = 4a-4$$

$3a = 6$ $a = 2$ Svar: $\underline{\underline{a=2}}$

Funktionen $f(x) = 1-3x$ är given. Bestäm först $f^{-1}(x)$ och beräkna sedan

1.51 a) $f(a)+f^{-1}(a)$

$$f(g(x)) = 1-3g(x) = x$$

$$g(x) = \frac{1-x}{3}$$

$$f^{-1}(a) = g(a) = \frac{1-a}{3}$$

$$f(a)+f^{-1}(a) = 1-3a + \frac{1-a}{3} = \frac{4}{3} - \frac{10a}{3} = \underline{\underline{\frac{2(2-5a)}{3}}}$$

b) $f(a) \cdot f^{-1}(a) = (1-3a)\left(\frac{1-a}{3}\right) = \frac{1-a-3a+3a^2}{3} = \underline{\underline{\frac{1-4a+3a^2}{3}}}$

c) $f(f^{-1}(a)) = 1-3f^{-1}(a) = 1-3\cdot\left(\frac{1-a}{3}\right) = 1-(1-a) = \underline{\underline{a}}$

enl. def!

d) $f^{-1}(f(a)) = \frac{1-f(a)}{3} = \frac{1-(1-3a)}{3} = \frac{3a}{3} = \underline{\underline{a}}$

1.52 Vilken funktion är invers till

a) $f(x) = \frac{x}{4}$ $f(g(x)) = \frac{g(x)}{4} = x \Rightarrow g(x) = \underline{\underline{4x}} = f^{-1}(x)$

b) $f(x) = 10^x, x>0$ $f(g(x)) = 10^{g(x)} = x \Rightarrow g(x) = \underline{\underline{\lg x}} = f^{-1}(x)$

c) $f(x) = x^2, x>0$ $f(g(x)) = g(x)^2 = x \Rightarrow g(x) = \underline{\underline{\sqrt{x}}} = f^{-1}(x)$

d) $f(x) = \ln x, x>0$ $f(g(x)) = \ln(g(x)) = x \Rightarrow g(x) = \underline{\underline{e^x}} = f^{-1}(x)$

1,54 a) $y=4 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ b) $g = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1} \Rightarrow$ två värden, Om $x \leq 0$ inverterbar

$f^{-1}(x) = g(x)$ c) $y = \sin(x)$

1,48

$f'(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$f(x) = 8x \Rightarrow 8\,g(x) = x$

$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{x}{8}$

f

1,55

$f(x) = bx + c \Rightarrow b(g(x)) + c = x$

$f^{-1}(x) =$

$g(x) = \frac{x-c}{b} = bx + c$

$b^2x + bc + c - x = 0$

$b^2 + b\frac{c}{x} + \frac{c}{x} - 1 = 0$

$b = \frac{c}{2x} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4x^2} + 1}$

$b = \frac{c}{2x} \pm \sqrt{\frac{c^2 + 4x^2}{4x^2}}$

$\frac{x}{b} - \frac{c}{b} = bx + c$

$x - c = b^2x + bc$

$x - c = b(bx + c)$

$b = 1 \Rightarrow$

$\cancel{x} - c = \cancel{x} + c$

$-c = +c \Rightarrow$

$c = 0$

$\Rightarrow f(x) = x$

$f^{-1}(x) = g(x) = x$

$b \cdot (g(x)) + c = x$

$b \cdot g(x) = x - c$

$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{x-c}{b}$

$b \cdot x + c = \frac{x}{b} + \frac{c}{b}$

$b = 3$
$c = 2$

$3x + 2 = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$

1,56 $f(x) = x - 1$

a) $f(g(x)) = g(x) - 1 = x$

$f^{-1}(x) = g(x) = x + 1$

b) $f(x) = \sqrt{1-x}, \quad 0 < x < 1$

$f(g(x)) = \sqrt{1 - g(x)} = x$

$1 - g(x) = x^2$

$f^{-1}(x) = g(x) = 1 - x^2, \ 0 < x < 1$

c) $f(x) = \ln x$

$f(g(x)) = \ln g(x) = x$

$f^{-1}(x) = g(x) = e^x$

d) $f(x) = x^2 - 2x, \quad x > 1$

$f(g(x)) = (g(x))^2 - 2\,g(x) = x$

$g(x) = 1 \pm \sqrt{1 + x}$

$\boxed{g(x) = 1 + \sqrt{1+x}, \quad x > 1}$

e) $f(x) = \frac{1}{x-1}, \ x > 1$

$f^{-1}(x)$? $\quad f(g(x)) = \frac{1}{g(x) - 1} = x$

$g(x) = \frac{1+x}{x}, \quad x > 1$

f) $f(x) = \lg(x^2), \quad x < 0$ $\quad \begin{cases} D_f = \left]-\infty, 0\right[\\ V_f = \mathbb{R} \end{cases}$

$f(g(x)) = \lg\left((g(x))^2\right) = x$

$g(x)^2 = 10^x$

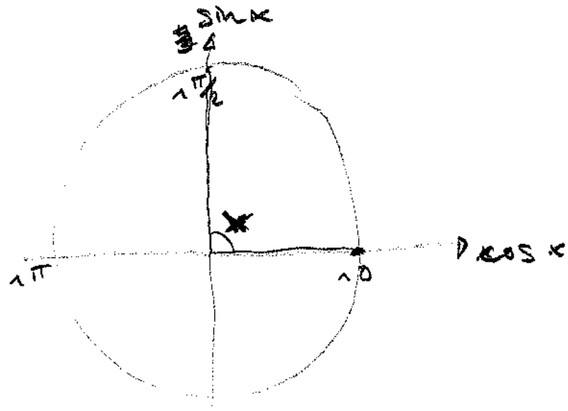
$g(x) = \pm\sqrt{10^x}, \quad x < 0$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$V_{f^{-1}} = \left]-\infty, 0\right[$

Lektion 8

(1,57) Beräkna exakt (här efterfrågas alltså sex vinklar)



a) $\arcsin 1 = \left[\sin^{-1} 1\right] = \pi/2$

b) $\arcsin 0 = 0$

c) $\arcsin 1/\sqrt{2} = \pi/4$

d) $\arcsin \frac{1}{2} = \pi/6$

e) $\arcsin \pi = [\pi > 1]$, (ej definierad ty $-1 \leq \sin \leq 1$)

f) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\pi/3$

(1,58) Lös ekvationerna nedan för $0 \leq x \leq \pi/2$. Svara med hjälp av arcsin-funktionen

a) $\sin x = 0{,}2$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\boxed{x = \arcsin 0{,}2}$ ty $f(g(x)) = x$

$x = \arcsin(\sin(x)) = \arcsin 0{,}2 = x$ $\quad \begin{cases} f(x) = \arcsin x \\ g(x) = \sin x \end{cases}$

b) $\sin x = 0{,}9 = g(x)$

$x = f^{-1}(g(x)) = \arcsin(\sin(x)) = \underline{\underline{\arcsin 0{,}9}}$

(1.59) Ange samtliga lösningar till ekvationerna. Svara exakt med hjälp av arcsin-funktionen

a) $\sin x = 0{,}24$ $\quad \begin{cases} x_1 = \arcsin 0{,}24 + n \cdot 2\pi \\ x_2 = \pi - \arcsin 0{,}24 + n \cdot 2\pi \end{cases}$

b) $\sin x = -0{,}55$ $\quad \begin{cases} x_1 = -\arcsin 0{,}55 + n \cdot 2\pi \\ x_2 = \pi + \arcsin 0{,}55 + n \cdot 2\pi \end{cases}$

1,59

c) $\sin 4x = 0{,}61$

$\arcsin(\sin 4x) = \arcsin 0{,}61 + n \cdot 2\pi$

$4x = \arcsin 0{,}61 + n \cdot 2\pi$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}\arcsin 0{,}61 + n\frac{\pi}{2} \\ x_2 = \frac{\pi - \arcsin 0{,}61}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

d) $\sin(3x - 0{,}2) = 0{,}15$

$\arcsin(\sin(3x-0{,}2)) = \arcsin 0{,}15 + n \cdot 2\pi$

$$\begin{cases} 3x - 0{,}2 = \arcsin 0{,}15 + n \cdot 2\pi \\ x_1 = \frac{0{,}2 + \arcsin 0{,}15}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \\ 3x - 0{,}2 = \pi - \arcsin 0{,}15 + n \cdot 2\pi \\ 3x = \pi - \arcsin 0{,}15 + 0{,}2 + n \cdot 2\pi \\ x_2 = \frac{\pi + 0{,}2 - \arcsin 0{,}15}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

1,60 Beräkna exakt

a) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$ x x

tar ut varandra!

b) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ x x

cancellering!

$f^{-1}(f(x)) = x$

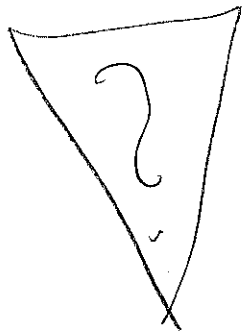
1.61 Funktionen $f(x) = \arccos x$ definieras som inversen till funktionen $\cos x$ i intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Vilken definitions-mängd har funktionen $f(x) = \arccos x$

Svar: $D_f = [x, -1 \leq x \leq 1]$

EXTRA

(1,64) Beräkna $\arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{3}+2\pi\right) =$

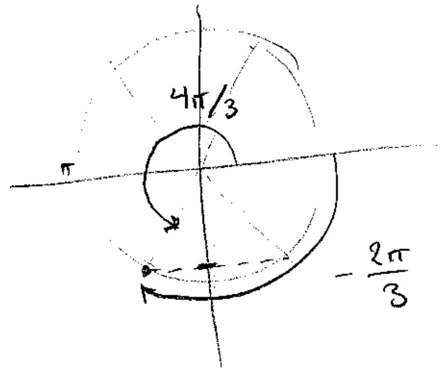
$\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi-\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$



$\arcsin\left(\sin -\frac{\pi}{3}\right.$

$\frac{10\pi}{3} = \frac{(6+4)\pi}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}\pi$

$\sin\frac{10\pi}{3} = \sin\frac{4\pi}{3}$

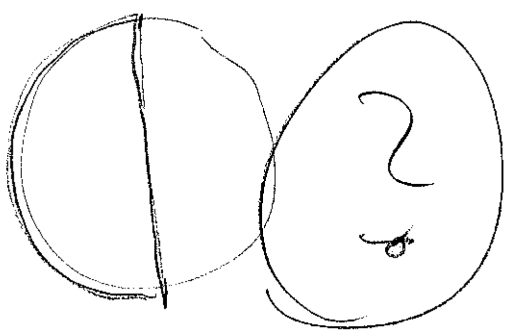


(1,65) Bestäm inversen till $f(x) = \sin x$ i intervallet $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

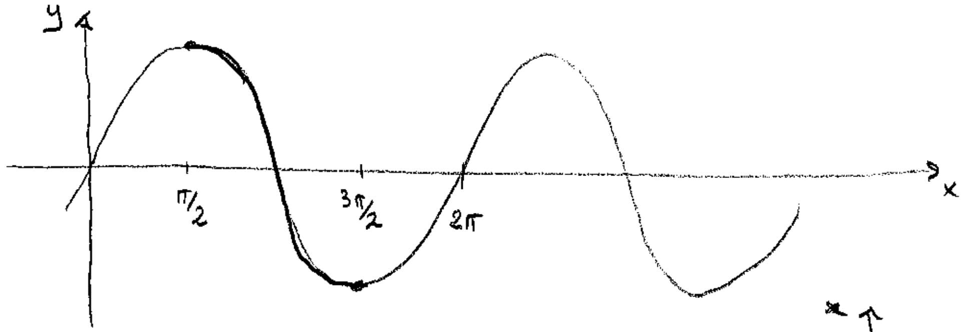
$f(g(x)) = x$

$\sin g(x) = x$

$g(x) = \arcsin x + n.$



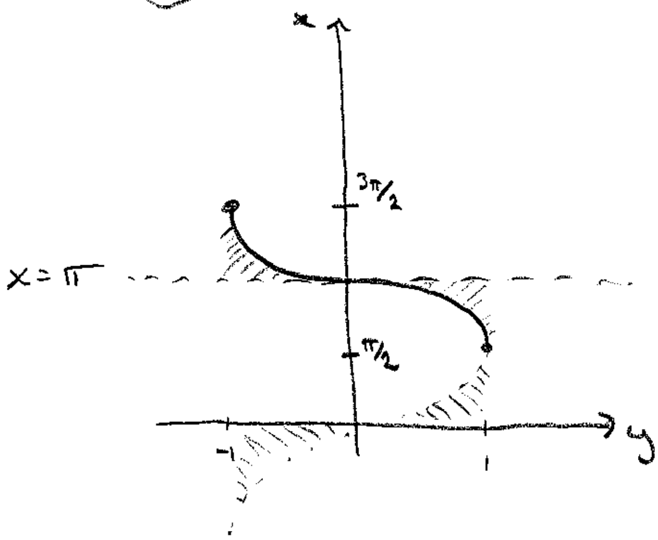
(1,65) Bestäm inversen till $f(x) = \sin x$ i intervallet $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$



<u>Grafen</u> till $f^{-1}(y)$ ger oss:

$D_{f^{-1}} = [-1, 1]$

$V_{f^{-1}} = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$



$\Rightarrow$ $x = \pi - \arcsin x$

(1,66) $y = \tan x \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$x = \arctan y$

a) $y = \arctan x$ är invers till $\boxed{x = \tan y \quad , \quad y \in \mathbb{R}}$

b) $\left.\begin{array}{l} V_{f^{-1}} = \left\{x \ , \ x \in \mathbb{R}\right\} \\ D_{f^{-1}} = \left\{y \ , \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\} \end{array}\right\}$ för $x = \tan y$

$\left.\begin{array}{l} D_f = \left\{x, \ x \in \mathbb{R}\right\} \\ V_f = \left\{y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\} \end{array}\right\}$ för $y = \arctan x$

(1.66) Ekvationen $y = \tan x$ har för varje tal y precis en lösning x för $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Denna lösning kallas $\arctan y$.

a) Vilken funktion är $y = \arctan x$ invers till

Svar: invers till $\underline{y = \tan x}$

b) Vilken definitionsmängd och värdemängd har funktionen $y = \arctan x$

$$D_f = \{x \mid \cancel{-1 < x < 1}\}$$

$$V_f = \{y \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$$

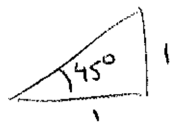
$\cancel{R}$

Varför $D_f = \mathbb{R}$

(1.67) Beräkna exakt.

a) $\underbrace{\arctan 1}_{x} \Rightarrow \tan x = 1$

$$\tan(\underbrace{\arctan 1}) = 1 \Rightarrow$$



$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{4}}} \; (+ n \cdot \pi) \quad ? \text{ nej?}$$

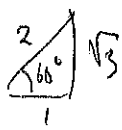
b) $\underbrace{\arctan 0}_{x} \Rightarrow \tan(\underbrace{\arctan 0}_{x}) = 0$

$$\tan x = 0$$

$$\underline{\underline{x = 0}} \; (+ n \cdot \pi) \quad ? \text{ nej?}$$

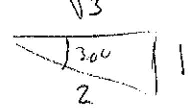
c) $\underbrace{\arctan \sqrt{3}}_{x} \Rightarrow \tan(\underbrace{\arctan \sqrt{3}}_{x}) = \sqrt{3}$

$$\tan x = \sqrt{3}$$



$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{3}}}$$

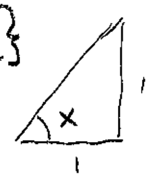
d) $\arctan -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan(\arctan -\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$



$$\tan x = -\frac{\pi}{6}$$

(1.67) Beräkna exakt

a) $\underbrace{\arctan 1}_{x}$, D_f , alla reella tal
$V_f = \{x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$



$\tan x = [\tan(\arctan 1)] = 1$

$x = \pi/4$

b) $\underbrace{\arctan 0}_{x}$, D_f , $\mathbb{R}$
$V_f = \{x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$

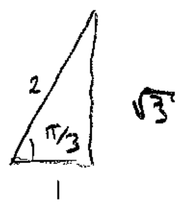
$\tan x = [\tan(\arctan 0)] = 0$

$\tan x = 0 \Rightarrow$ ———

$x = 0$

c) $\underbrace{\arctan \sqrt{3}}_{x}$,

$\tan x = [\tan(\arctan \sqrt{3})] = \sqrt{3}$

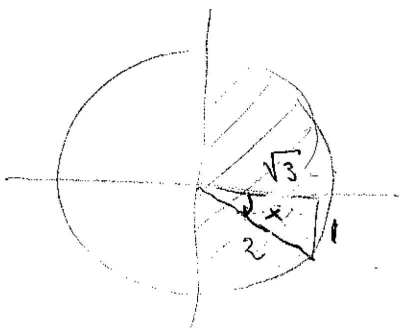


$x = \pi/3$

d) $\underbrace{\arctan -\frac{1}{\sqrt{3}}}_{x}$

$\tan x = \tan\left(\arctan -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = -\frac{\pi}{6}$



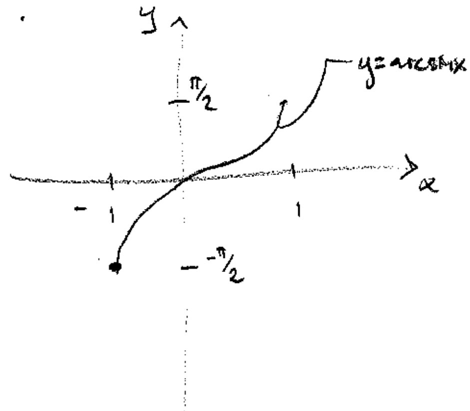
(1.68) Lös ekvationen

$\underbrace{\arctan x}_{y} = \pi/6$, $x \in \mathbb{R}$

$\tan y = \tan(\arctan x) = x$

$\tan \frac{\pi}{6} = x \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ex 1.34 Derivera funktionen $f(x) = y = \arcsin x$.



Lösning: $D_f = \{x, -1 \leq x \leq 1\}$

$V_f = \{y, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$

$$\boxed{D(f(x)) = \frac{1}{D(f^{-1}(y))}}$$

Tag fram inversen till $y = \arcsin x$

$$\boxed{f^{-1}(y) = \sin y} = \sin(\arcsin x) = \underline{\underline{x}}$$

$D(f^{-1}(y)) = \cos y$ $\quad [= \text{trig ettan} = \sqrt{1 - \sin^2 y}]$

$$D(f(x)) = \frac{1}{D(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

omskrivning

Efterfrågas funktion av $\underline{\underline{x}}$!

använd givet samband!

$\boxed{x = \sin y}$

Lektion 9

$y = \arcsin x = f(x)$

$\sin(\arcsin(x)) = x$

$f^{-1}(y) = \sin \underbrace{y} = x$

(1.69) Bestäm $f'(0)$ om $f(x) = \arcsin x$

$y = f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

$x = f^{-1}(y) = \arcsin y$

$$\boxed{D\left(f^{-1}(y)\right) = \frac{1}{D\left(f(x)\right)}}$$

Trig ettan

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$D\left(f^{-1}(y)\right) = \frac{1}{\cos x}$$

$$D f^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Variabelsubstitution

$$D\left(\arcsin x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Svar: $D\left(\arcsin 0\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-0^2}} = \underline{\underline{1}}$

(1.70) Jämför definitionsmängderna för funktionen

$f(x) = \arcsin x$ och dess derivata $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D_f = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

$D_{f'} = \{x \mid -1 < x < 1\}$

Svar: Definitionsmängderna är densamma? Nästan!

~~Nej~~

KORREKT ty

$f'(x)$ ej definierad i $x=1$, $x=-1$

Bestäm ekvationen för tangenten till funktionen i punkten $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$

1,71

$f(x) = \arcsin x$, ~~Bestäm $f'(x)$ i punkten $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$~~

Lösn

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{D \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \ldots \text{ nonsense !} \qquad \cos y \neq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

- Uttryck $\cos y$ med hjälp av $x = \sin y$
- Tag hjälp av "trig. ettan" $1 = \sin^2 y + \cos^2 y$

$$\Rightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$$

$$\sqrt{\cos^2 y} = |\cos y| = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \cos y$$

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow D \arcsin = \frac{1}{D \sin y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = [x = \sin y] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Det vill säga lutningen beskrivs av värdet på derivatan i punkten $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Enpunktform:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - \frac{\pi}{8} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Svar: $y = \frac{2}{\sqrt{3}} x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}$

(1,72) Bestäm derivatan av

a) $y = f(x) = \arcsin(2x+1) \Leftrightarrow 2x+1 = \sin y \quad , \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$

$x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sin y - 1}{2}$

$\begin{cases} y = \arcsin(2x+1) \\ x = \frac{\sin y - 1}{2} \end{cases} \qquad D(\arcsin x) = \frac{1}{D\left(\frac{\sin y - 1}{2}\right)} = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2}\cos y}_{\neq 0}} \ , -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Trig ettan $\Rightarrow$ $D \arcsin x = \frac{2}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \left[\sin y = 2x+1\right] = \frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} =$

$= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2-4x-1}} = \frac{2}{2\sqrt{-x^2-x}} = \frac{1}{\sqrt{-x^2-x}}$

b) $y = \arcsin(x^2) \Rightarrow x^2 = \sin y$

$x = \pm\sqrt{\sin y} = \sqrt{\sin y} \quad , \quad 0 < y < \pi/2$

$D \arcsin(x^2) = \frac{1}{D\sqrt{\sin y}} = \frac{2\sqrt{\sin y}}{\cos y} = \frac{2\sqrt{\sin y}}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

c) $y = \arcsin\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \sin y$

$x = \sin^2 y$

$D \arcsin\sqrt{x} = \frac{1}{D\sin^2 y} = \frac{1}{2\sin y\cos y} = \frac{1}{2\sin y\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

d) $y = x \cdot \arcsin x$

$\frac{dy}{dx} = \arcsin x + x \cdot D\arcsin x = \arcsin x + x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

1.73 Let $y = f(x) = \arccos x$

$\boxed{f^{-1}(y) = \cos y} = \cos(\arccos x) = x$

a) $f'(x) = D(f(x)) = \dfrac{1}{D(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{-\sin y} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ VSV.

Trig ettan

$= x$

b) $f'(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-0}} = \underline{\underline{-1}}$

1.74

Lektion 10

Maclaurinutvecklingar

$f(x) = x^2 - x$

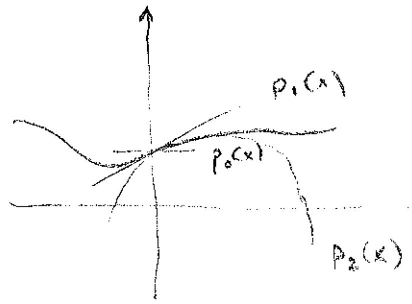
$f(0{,}2) = (0{,}2)^2 - 0{,}2 = 0{,}04 - 0{,}2 = -0{,}16$

Polynom är enkelt att beräkna

$f(x) = \sin x$ $\qquad$ $f(x) = e^x$ $\qquad$ SVÅRT

$f(0{,}2) = \sin 0{,}2 \quad ?$ $\qquad$ $f(0{,}2) = e^{0{,}2} = ?$

• Approximera $f(x)$ väl nära $x=0$ med polynom



$p_0(x) = f(0)$

$p_1(x) = f(0) + f'(0)\cdot x$

$$\boxed{p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2}}$$

andra gradens polynom med rätt egenskaper

$p_2(0) = f(0)$ ok!

$p_2'(x) = f'(0) + f''(0)x \Rightarrow p'(0) = f'(0)$ ok!

0

$p_2''(x) = f''(0) \Rightarrow p''(0) = f''(0)$ ok!

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

(1.79) Bestäm Maclaurinpolynomet av tredje graden till funktionen $f(x) = e^x$.

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad , \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f(0) = e^0 = 1 & \Rightarrow a_0 = 1 \\ f'(0) = e^0 = 1 & \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1} = 1 \\ f''(0) = e^0 = 1 & \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \\ f^{(3)}(0) = e^0 = 1 & \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Svar: $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

(1.80) Bestäm Maclaurinpolynomet av andra graden till funktionen $f(x) = \cos x$

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad , \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f(0) = \cos 0 = 1 & \Rightarrow a_0 = 1 \\ f'(0) = \sin 0 = 0 & \Rightarrow a_1 = 0 \\ f''(0) = -\cos 0 = -1 & \Rightarrow a_2 = \frac{-1}{2!} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Svar: $p_2(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2$

(1.81) Approximera $f(x) = \sqrt{1+x}$ med ett polynom av första graden

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x \quad , \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f(0) = \sqrt{1+0} = 1 & \Rightarrow a_0 = 1 \\ f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} & \Rightarrow a_1 = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Svar: $p_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$

(1.83) Skriv summan

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\dots+\frac{17}{18}$$

med summatecken

Svar: $\displaystyle\sum_{n=1}^{17}\frac{n}{n+1}$

(1.84) Bestäm Maclaurinpolynomet av andra graden till

$f(x)=\ln(x+1)$

med hjälp av definitionen och jämför svaret med (ex. 1.35).

$$P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

$$\begin{cases} f(0)=\ln(0+1)=\ln 1=0 & \Rightarrow a_0=0\\ f'(0)=\dfrac{1}{0+1}=1 & \Rightarrow a_1=\frac{1}{1}=1\\ f''(0)=-\dfrac{1}{(0+1)^2}=-1 & \Rightarrow a_2=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

Svar: $P_2(x)=x-\frac{x^2}{2}$

STÄMMER!

Enligt Def: Maclaurinserie

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k}$$

$k=2$

$$P_2(x)=\sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k=0+x-\frac{1}{2}x^2$$

(1.85) Maclaurinutveckla $f(x)=\frac{1}{1-x}$; $P_k(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_kx^k$

$f(0)=1 \Rightarrow a_0=1$

$f'(x)=+\dfrac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(0)=1=1!$

$f''(x)=+\dfrac{2!}{(1-x)^3} \Rightarrow f''(0)=2=2!$

$f^{(3)}(x)=+\dfrac{\cancel{6}\,3!}{(1-x)^4} \Rightarrow f^{(3)}(0)=6=3!$

$f^{(k)}(x)=\dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}} \Rightarrow f^{(k)}(0)=k!$

$$P_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{k!}\cdot x^k=\sum_{k=0}^{n}x^k$$

Om graden är 5 blir svaret

$$P_5(x)=\sum_{k=0}^{5}x^k$$

(1.86) Bestäm Maclaurinpolynomet av åttonde graden till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$$

[Ledning: (Uppg. 1.85)
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$]

· Sätt $z = -x^3$

$$f(x) = x^2 \cdot \frac{1}{1-z} = x^2 \cdot (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots)$$

$$P_8(x) = x^2(1 - x^3 + x^6 - \dots) = \underline{\underline{x^2 - x^5 + x^8}}$$

(1.87) Bestäm Maclaurinpolynomet av sjätte graden till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3}{1+2x}$$

Sätt $z = -2x \implies f(x) = x^3\left(\frac{1}{1-z}\right) = x^3(1 + z + z^2 + \dots)$

$$P_6(x) = x^3(1 - 2x + 4x^2 - 8x^3) = x^3 - 2x^4 + 4x^5 - 8x^6$$

(1.88) Beräkna summan av den alternerande harmoniska serien

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = ?$$

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots$$

$$\begin{cases} f(x) = \ln(x+1) \\ f'(x) = \frac{1}{x+1} \\ f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \\ f^{(3)}(x) = \frac{2!}{(x+1)^3} \\ f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(x+1)^4} \end{cases} \quad \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = -1 \\ f^{(3)}(0) = 2! \\ f^{(4)}(0) = -3! \end{cases}$$

$$P_n(x) = 0 + x - \frac{1!}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \dots$$

$$= 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

Mönstret säger oss att $x = 1$ och att serien betyder

$\underline{\underline{\ln 2}}$ $(\ln(1+1)$