4	Matematiska modeller med DE	4302, 4303, 4308, 4309, 4310	4304, 4305, 4306, 4311, 4312	4313, 4314

Lektion 4

- Ex 1
- Ex 2
- Genomgång via länk.

45	**Lektion 4.** Kolla igenom följande länkar."Modeller med differentialekvationer och GeoGebra" med Magister Grip. "Differentialekvationer prov del 3" med Magister Grip.		**Lektion 4 igen.** Anteckningar från dagens lektion hittar du här.	**Lektion 5.**	**Lektion 6 (Diagnos).** Räkna på i boken enligt planeringen. Utdelning av Häfte om Differentialekvationer?

L4 Matematiska modeller med DE

4	Matematiska modeller med DE	4302, 4303, 4308, 4309, 4310	4304, 4305, 4306, 4311, 4312	4313, 4314

4302 Lösning:

Antalet bakterier y tillväxer med en hastighet som är 12% per timme av den aktuella bakteriemängden. Från början var antalet bakterier 150 000.
Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp.

DE

Tillväxthastighet $= y' = \left(\frac{dy}{dt}\right)$

12% av $y = 0{,}12y$

$$\Rightarrow \boxed{y' = 0{,}12y} \quad \boxed{y(0) = 150000}$$

4	Matematiska modeller med DE	4302, 4303, 4308, 4309, 4310	4304, 4305, 4306, 4311, 4312	4313, 4314

4306

a) Hur blir DE om nettoutvandringen är 0,25 miljoner/år.

Lösning:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}016y - 0{,}25 \quad , \quad y(0) = 12$$

Svar: 11,37 milj

b) Beräkna folkmängden i början av år 2020 om nettoutvandringen hela tiden är 0,25 miljoner/år.

Lösning:

$$y' - 0{,}016y = -0{,}25$$

Ansätt $y_h = C \cdot e^{0{,}016t}$

Ansätt $y_p = D$

VL: $y' - 0{,}016y = 0 - 0{,}016D$

HL: $-0{,}25$

VL = HL

$-0{,}016D = -0{,}25$

$D = \frac{-0{,}25}{-0{,}016}$

$D = 15{,}625$

Folkmängden y miljoner förändras enligt DE $\boxed{\frac{dy}{dt} = 0{,}016y}$

där t är tiden räknat i antal år från början av år 2010, då folkmängden var 12 miljoner. (Ingen hänsyn har då tagits till in- och utvandring.

$$y = y_h + y_p = Ce^{0{,}016t} + 15{,}625$$

$$y(0) = 12 \Rightarrow C = -3{,}625$$

$$y(10) = -3{,}625e^{0{,}016 \cdot 10} + 15{,}625 = 11{,}37$$

L5

41304

$y(h)$ = trycket som fn av höjden h.

y' = hastigheten

a)

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= k \cdot y \\ y(0) &= 101{,}3 \text{ kPa} \\ y(1{,}00) &= 89{,}9 \text{ kPa} \end{aligned}}$$

$y' - ky = 0$

Ansätter $y = C \cdot e^{ah}$

$y' = a \cdot C e^{ah}$

VL: $y' - ky = aCe^{ah} - kCe^{ah} =$

$= Ce^{ah}(a - k)$

HL: 0

$\Rightarrow a = k \Rightarrow$

$$\boxed{y = Ce^{kh}}$$

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = 101{,}3 \text{ kPa} \\ y(1{,}00) = 89{,}9 \text{ kPa} \end{cases}$$

, $y(h)$, h är höjden i km.

$$y(h) = 101{,}3 \cdot e^{-0{,}119h}$$

b) $$\boxed{y(2{,}102) = 101{,}3 \cdot e^{-0{,}119 \cdot 2{,}101} = 78{,}8 \text{ kPa}}$$

$$\Rightarrow \quad y = Ce^{kh}$$

Villkor $y(0)$: $101{,}3 = Ce^{k \cdot 0} \Rightarrow C = 101{,}3 \text{ kP}$

$$\Rightarrow \quad y = 101{,}3 \cdot e^{kh}$$

Villkor $y(1{,}00)$: $89{,}9 = 101{,}3 \cdot e^{k \cdot 1{,}00}$

$$k = \ln \frac{89{,}9}{101{,}3} = -0{,}11938\ldots$$