# Lektion 23. Induktionsbevis

"Att bevisa en formel" i 3 steg.

1. Visa att formeln gäller i ett specialfall. Gärna det enklaste fallet ($n=1$)

2. Visa att om formeln gäller för $n=p$ (antagande)
   , så gäller formeln för $n=p+1$ (påstående)
   } Bevisas

3. Slutsats: Om 1 och 2 gäller så gäller formeln alla $n$.

Ex 1) $3 + 9 + 15 + \ldots + (6n - 3) = 3n^2$ ← formel för $\Sigma$

1) Visa för $n=1$, eller det enklaste fallet.
2) Antagande: $n=p$
   Påstående: $n=p+1$
   Bevis: VL = HL
3) Slutsats: "Gäller alla n"

① Visa att formeln gäller för $n=1$

VL: $6 \cdot 1 - 3 = 6 - 3 = 3$

HL: $3 \cdot 1^2 = 3$ VL = HL

② Antagande: Formeln gäller för $n=p$

$$3 + 9 + 15 + \ldots + (6p - 3) = \boxed{3p^2}$$

Påstående: Formeln ska gälla $n = p+1$

VL: $\underbrace{3 + 9 + 15 + \ldots + (6p-3)} + (6(p+1) - 3) = 3p^2 + 6p + 3$

HL: $3(p+1)^2 = 3(p^2 + 2p + 1) = 3p^2 + 6p + 3$ VL = HL

③ Då ① gäller och ② gäller så gäller formeln för alla n.

Ex 2) Visa mha induktionsbevis att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

forts.

Visa mha induktionsbevis att $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}} = \boxed{\frac{n}{n+1}}$

VL

formel

1

Vi börjar med att visa att påståendet gäller för $n = 1$.
Detta är vår induktionsbas.

$$VL = \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$HL = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$VL = HL$$

2

Nu antar vi att påståendet är sant för något $n$, säg $n = p$.
Det ger oss

Antag

$$\frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \ldots + \frac{1}{p(p+1)} = \boxed{\frac{p}{p+1}}$$

Detta är vårt
induktionsantagande

Påstå

Om påståendet gäller för $n = p$. Gäller det då också för $n = \boxed{p + 1}$? (Induktionssteg)

$$VL = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \ldots + \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+1+1)} =$$

$$= \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}$$

$$HL = \frac{p+1}{(p+1)+1} = \frac{p+1}{p+2}$$

$$VL = HL$$

3

Om påståendet gäller för $n = p$, gäller det även för $n = p + 1$ och vi har visat att det gäller för $n = 1$ och då gäller det även för $n = 2,3,4\ldots$

Källa: "Hälsingegymnasiet i Bollnäs"