Np Ma 3c

1) $|x_1 - x_2| = |-4-1| = |-5| = 5$ **Svar: 5**

---

2) **Svar: $x = 6$** (uttrycket är inte definierat när nämnaren $6 - x = 0$, dvs då $x = 6$.)

---

3) **Svar: D $(4x^3 + 2x^2)$**

---

4) $\sin v = \frac{1}{2} \Rightarrow v = 30°$

$\sin 30° = \sin(180° - 30°) = \sin 150°$

Svar: $v = 30°$ och $v = 150°$

---

5) a) $f'(x) = 12x^3 + 6$

b) $f'(x) = e^x + e$

c) $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-1} + \frac{3}{2}x \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{-2} + \frac{3}{2} = \frac{-2}{3x^2} + \frac{3}{2}$

$f'(x) = -\frac{2}{3x^2} + \frac{3}{2}$

---

6) **Svar: C**

---

7) a) **Svar: $x = 4$**

b) **Svar: $-2 < x < 4$**

---

8) $f(x) = f'(x)$ för $f(x) = e^x$ men eftersom det ska vara alla funktioner måste det vara en faktor framför e^x $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a \cdot e^x \\ f'(x) &= a \cdot e^x \end{aligned}\right\} \text{oavsett vad } x \text{ är kommer } f(x) \neq 0.$$

Svar: $f(x) = a \cdot e^x$

9) a) $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + 7) = e^0 + 7 = 1 + 7 = 8$ Svar: 8

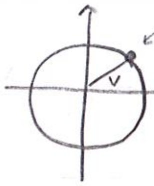
b) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{16x}{4x+9}} = \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{\frac{16x}{x}}{\frac{4x}{x} + \frac{9}{x}}} = \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{16}{4 + \frac{9}{x}}} =$

$\frac{9}{x}$ går mot noll när $x \to \infty$

$= \sqrt{\dfrac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$ Svar: 2

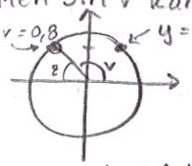
---

10)

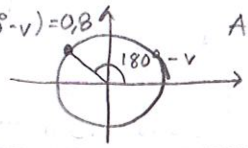


sin v = 0,8 ⇒ Avläsning ger att cos v = 0,6

Men sin v kan också vara denna vinkel:

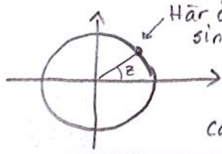


... och då blir 180° − v följande:



Avläsning ger då att: cos (180° − v) = −0,6

... och då blir (180° − v) ...



Här är (180° − v) så sin (180° − v) = 0,8 → Avläsning ger då att cos (180° − v) = 0,6

Svar: ±0,6

---

11) $\displaystyle\int_1^2 6x^2\,dx = \left[\frac{6x^3}{3}\right]_1^2 = \left[2x^3\right]_1^2 = 2\cdot 2^3 - 2\cdot 1^3 = 16 - 2 = 14$ Svar: 14

---

12) $f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$ ger: $3x^2 - 6x = 0$

$3x(\underbrace{x-2}_{=0}) = 0$

$x_1 = 0$ $\quad$ $= 0$ ger $x_2 = 2$

$f(0) = 0$

$f(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$

Extrempunkterna är: (0,0) och (2,−4)

Extrempunkternas karaktär: $f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = -6 \Rightarrow$ MAX

$f''(2) = 6 \Rightarrow$ MIN

SVAR: (0,0) är en maximipunkt och (2,−4) är en minimipunkt.

13) a) $f(x) = 5x^2 + 3x$

$f'(x) = 10x + 3$

Bestäm x då $f'(x) = 18$:

$18 = 10x + 3$

$15 = 10x$

$x = 1,5$

Svar: $x = 1,5$

b) Tangentens ekvation: $y = kx + m$

$k = g'(6)$

$g(x) = x^2 + 8x$

$g'(x) = 2x + 8 \quad \Rightarrow \quad g'(6) = 2 \cdot 6 + 8 = 20$

y-koordinaten där $x = 6$: $g(6) = 6^2 + 8 \cdot 6 = 84 \Rightarrow$ Punkten $(6, 84)$

Tangenten : $y = 20x + m$

Bestämmer m genom att sätta in $(6, 84)$:

$84 = 20 \cdot 6 + m$

$84 = 120 + m$

$84 - 120 = m$

$m = -36$

Alltså: $y = 20x - 36$ för tangenten

Där tangenten skär x-axeln är $y = 0$.

$0 = 20x - 36$

$36 = 20x$

$\frac{36}{20} = x \quad \Rightarrow \quad x = 1,8$

Svar: Skärningspunkten med x-axeln är $(1,8 ; 0)$

---

14) a) $\frac{(x-3)(x+2)}{2x-6} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{2\cancel{(x-3)}} = \frac{x+2}{2}$

Svar: $\frac{x+2}{2}$

b) $\frac{x^2+8x+16}{2x^2-32} = \frac{x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2}{2(x^2-16)} = \frac{(x+4)^2}{2(x+4)(x-4)} = \frac{\cancel{(x+4)}(x+4)}{2\cancel{(x+4)}(x-4)} =$

$= \frac{(x+4)}{2(x-4)}$

Svar: $\frac{x+4}{2(x-4)}$

15) $$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-2}^{5} = F(5) - F(-2) = -2-(-1) = -2+1 = -1$$

Avläser i grafen.

Svar: -1

16) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{A}{(x+h)} - \frac{A}{x}}{h} = \frac{\frac{Ax}{x(x+h)} - \frac{A(x+h)}{x(x+h)}}{h} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{Ax}-\cancel{Ax}-Ah}{x(x+h)}}{\frac{h}{1}} = \frac{-Ah}{x(x+h)}\cdot\frac{1}{h} = \frac{(-A)\cdot\cancel{h}}{x\cdot(x+h)\cdot\cancel{h}} = \frac{-A}{x(x+h)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-A}{x(x+h)} = \frac{-A}{x^2}$$

Svar: $f'(x) = \frac{-A}{x^2}$

17) $$f(x) = x^2 + 5x \Rightarrow f'(x) = 2x+5$$
$$g(x) = -5x^2 + 14x \Rightarrow g'(x) = -10x+14$$

$f'(x) = g'(x)$ ger:

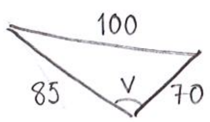
$$2x+5 = -10x+14$$
$$12x+5 = 14$$
$$12x = 9$$
$$x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Svar: $x = 0{,}75$

18) a) $$K'(30) = \frac{\Delta K}{\Delta t} \approx \frac{14000}{8} = 1750$$

Svar: 1750 st/år

b) Svar: Kanadagässen ökar med 800 st/år år 1997.

19) 

(m)

Cosinussatsen ger v:

$$100^2 = 85^2 + 70^2 - 2\cdot 85\cdot 70\cdot \cos v$$
$$-2125 = -11900\cdot\cos v$$
$$\frac{-2125}{-11900} = \cos v \Rightarrow v \approx 79{,}71^\circ$$

Areasatsen ger arean: $A = \frac{85\cdot 70\cdot \sin 79{,}71^\circ}{2} \approx 2927\ m^2 \approx 2900\,m^2$

Svar: $2900\ m^2$

20) a) $x^2 - 2x + y^2 - y = 0,5$

Sätter in punkten $(1, 2)$ dvs $x = 1$ och $y = 2$ och ser om VL = HL:

$$\left.\begin{array}{l} VL = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2^2 - 2 = 1 - 2 + 4 - 2 = 1 \\ HL = 0,5 \end{array}\right\} VL \neq HL$$

Svar: Punkten ligger ej på cirkeln.

b) $$x^2 - \underbrace{2x}_{2 \cdot 1 \cdot x} + 1^2 + y^2 \underbrace{- 1y}_{-2 \cdot 0,5 \cdot y} + 0,5^2 = 0,5 + 1^2 + 0,5^2$$

$$(x-1)^2 + (y - 0,5)^2 = \underbrace{1,75}_{=(\sqrt{1,75})^2}$$

Här ser man att medelpunkten är $(1 ; 0,5)$ och radien är $\sqrt{1,75}$ enligt cirkelns ekvation.

Cirkelns area $= \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \sqrt{1,75}^2 = \pi \cdot 1,75 \approx 5,5$ a.e.

Svar: 5,5 a.e.

---

21) a) Om $F(x)$ ska vara en primitiv funktion till $f(x)$, ska $F'(x) = f(x)$. Undersöker detta:

$F(x) = 3 \cdot e^x$

$\Rightarrow F'(x) = 3 \cdot e^x$ vilket inte är detsamma som $f(x) = e^{3x}$.

SVAR: Falskt

b) $f(x) = x^3 + ax$

Nollställen finns där $f(x) = 0$. $\Rightarrow$ $x^3 + ax = 0$

$x(x^2 + a) = 0$

$x_1 = 0$ $\quad$ $x^2 + a = 0$

$x^2 = -a$

Ger 3 olika nollställen. → • Om $a < 0$ blir $x^2 =$ positivtal $\Rightarrow x = \pm\sqrt{\text{pos.tal}}$

Gör 3 lika nollställen → • Om $a = 0$ blir $x^2 = 0$ $\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

Svar: Falskt

22) a) När hon startar är $t=0$. $\Rightarrow T(0) = 95 \cdot e^0 = 95$ Svar: 95 °C

b) $T(t) = 95 \cdot e^{-0{,}039 \cdot t} = 95 \cdot \underbrace{\left(e^{-0{,}039}\right)}_{}{}^{t}$ förändringsfaktorn

$$e^{-0{,}039} \approx 0{,}9618 = 96{,}18\ \%$$

Minskningen $= 100\% - 96{,}18\% \approx 3{,}8\ \%$ Svar: 3,8 %

c) Eftersom rumstemperaturen är 20°C, kan inte kaffet sjunka under 20°C. Detta inträffar när t är...

$$20 = 95 \cdot e^{-0{,}039 \cdot t}$$

$$\frac{20}{95} = e^{-0{,}039 \cdot t}$$

$$e^{\ln(20/95)} = e^{-0{,}039 \cdot t} \Rightarrow \ln\left(\frac{20}{95}\right) = -0{,}039 \cdot t$$

$$\frac{\ln\left(\frac{20}{95}\right)}{-0{,}039} = t$$

$$t \approx 39{,}95 \approx 40$$

Alltså: Efter 40 min. är kaffets temp. 20°C.

Testar vad t.ex. $T(60)$ är:

$$T(60) = 95 \cdot e^{-0{,}039 \cdot 60} \approx 9\ °C$$

Svar: Om t blir mer än 40 min. kommer kaffets temperatur sjunka under 20°C, dvs temperaturen i rummet, och det kan inte ske.

23) Talen är x och y.

$x + y = 8$

"produkten av $\underbrace{\text{talens differens}}_{x-y}$ och $\underbrace{\text{talens produkt}}_{x \cdot y}$" skrivs:

Kallas P.

$$\Rightarrow \quad P = (x-y) \cdot x \cdot y$$

$x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x$ Insättning av y ger...

$$\Rightarrow P(x) = (x-(8-x)) \cdot x \cdot (8-x) = (x-8+x)(8x-x^2) =$$

$$= (2x-8)(8x-x^2) = 16x^2 - 2x^3 - 64x + 8x^2 =$$

$$= 24x^2 - 2x^3 - 64x$$

Söker när P(x) är maximal:

$$P'(x) = 48x - 6x^2 - 64$$

$P'(x) = 0$ ger: $-6x^2 + 48x - 64 = 0$

$$x^2 - 8x + \frac{64}{6} = 0$$

$$x^2 - 8x + \frac{32}{3} = 0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - \frac{32}{3}}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{\frac{48}{3} - \frac{32}{3}}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{\frac{16}{3}}$$

$$x_1 = 4 + \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 6{,}31$$

$$x_2 = 4 - \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 1{,}69$$

$$P''(x) = 48 - 12x$$

$P''(6{,}31) \approx 48 - 12 \cdot 6{,}31 \approx -27{,}7 \Rightarrow$ MAX

$P''(1{,}69) \approx 48 - 12 \cdot 1{,}69 \approx 27{,}7 \Rightarrow$ MIN

Alltså

Ena talet: $4 + \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 6{,}31$

Andra talet:

$4 + \frac{4}{\sqrt{3}} + y = 8$

$y = 4 - \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 1{,}69$

Svar: Talen är 6,31 och 1,69.

24) $f(x)$ är en tredjegradsfunktion, dvs ser ut så här:

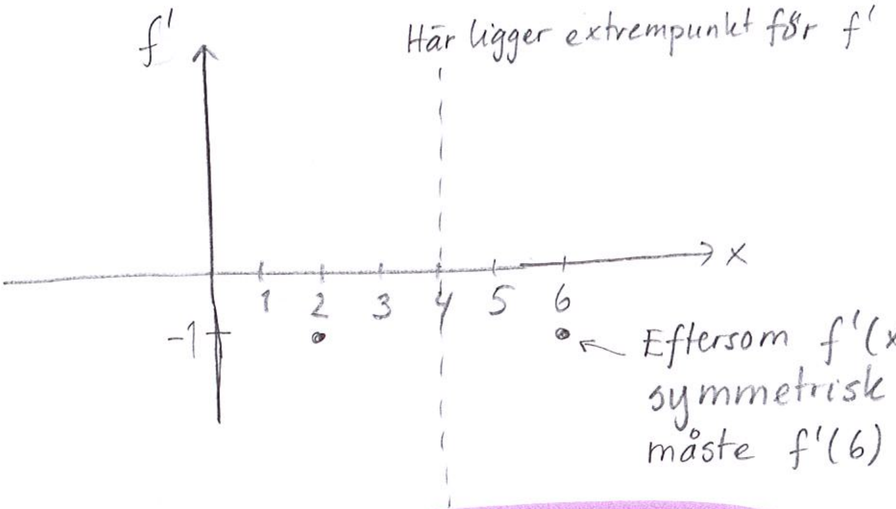
 eller 

$f'(x)$ blir då en andragradsfunktion.

$f'(2) = -1$ innebär att $f(2)$ är avtagande.

$f''(4) = 0$ innebär att $f'(4)$ har en extrempunkt där $x = 4$, eftersom f'' är lutningen på f'-grafen.

$f'(x)$ borde se ut så här:



Eftersom $f'(x)$ är symmetrisk kring $x = 4$ måste $f'(6) = -1$ också.

Svar: $f'(6) = -1$

---

25) Pengarna i burken $= P(x)$

$P(x) = x^2 \cdot 100$ där x = Marios ålder

Marios ålder	Pengar i burken (kr)
0 år	0
1 år	100
2 år	400
3 år	900
4 år	1600
5 år	2500
6 år	3600

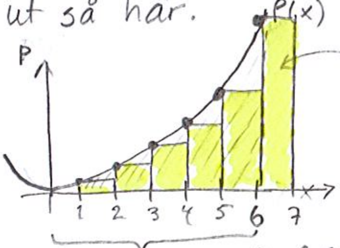
Summan av dessa år... 9100 kr

Svar: Se resonemanget →

$$\int_0^6 100x^2\,dx = \left[\frac{100x^3}{3}\right]_0^6 =$$

$$= \frac{100 \cdot 6^3}{3} - 0 = 7200 \text{ kr}$$

Grafen $P(x) = 100x^2$ ser ut så här.



Denna stapel finns ej med i integralen.

Integralen går från 0 till 6, dvs får inte med pengarna som sätts in på 6-årsdagen.

Det gula är summan av alla pengar vid varje födelsedag – inklusive 6-årsdagen. Denna area är större än integralens. V.S.B.